

# Etude des régimes d'autorotation d'une hélice

Adrien SUTTER

Epreuve de TIPE 2019

## 1 Introduction

Dans la nature, le mouvement suivi par les samares ou les graines d'érables lors de leur chute se caractérise par un phénomène d'autorotation, par lequel celles-ci tournoient sur elles-mêmes sous l'action de forces aérodynamiques exercées par l'air. Ce processus original a constitué une source d'inspiration notable pour l'homme, qui en a extrait les racines du fonctionnement d'un aéronef à voilure tournante libre, l'autogire.

L'autogire, doté d'une hélice principale libre, est propulsé en avant par une hélice de plus petite dimension positionnée à l'avant ou à l'arrière de l'appareil. L'hélice principale, traversée par un flux d'air ascendant, se met à tourner et assure ainsi la sustentation par autorotation. Lors d'une panne moteur, un hélicoptère peut également être amené à évoluer en autorotation.

Nous étudierons dans un premier temps le régime de vol vertical en autorotation, pour lequel nous chercherons à vérifier la cohérence entre le modèle théorique développé et les résultats expérimentaux obtenus. Enfin, nous développerons un modèle aspirant à décrire la dynamique de l'hélice en autorotation lors d'un vol horizontal, correspondant au vol "conventionnel" d'un autogire.

## 2 Etude théorique du vol vertical en régime stationnaire

### 2.1 Notations

On considère une hélice constituée de deux pâles de longueur  $R$ , de corde  $t$ . On néglige dans un premier temps l'élasticité des pâles et le phénomène d'angle de cône. Les pâles restent donc dans un plan orthogonal à l'axe de rotation de l'hélice. On étudie dans cette partie la chute verticale de l'hélice, par exemple celle de l'hélice d'un autogire ou d'un hélicoptère en cas de panne moteur.

On note  $V$  la vitesse de chute de l'autogire et  $w_{Ri}$  la vitesse induite par l'hélice. La vitesse du vent à travers l'hélice est alors :

$$w_{Bl} = V - w_{Ri}$$

On note  $\varepsilon$  l'angle d'inclinaison des pâles par rapport à l'horizontal, et  $\varphi_{Bl}$  l'angle entre la vitesse du vent arrivant sur la tranche et l'horizontal. L'angle d'incidence de l'air sur la pôle est alors :

$$\alpha_{Bl} = \varepsilon + \varphi_{Bl}$$

On note  $\omega$  la vitesse de rotation de l'hélice en régime stationnaire.

### 2.2 Calcul des forces s'appliquant sur l'hélice - hypothèse d'autorotation

On note respectivement  $C_z$  et  $C_d$  les coefficients de portance et de traînée du profil.

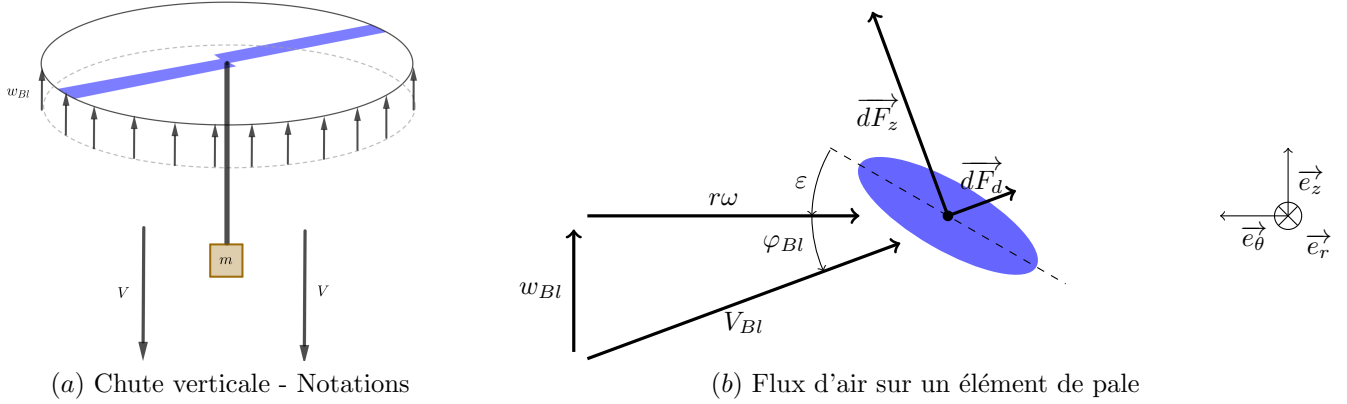


FIGURE 1 – Flux d'air sur l'hélice en vol vertical - Notations

On considère un élément de pale situé à une distance  $r$  de l'axe de rotation du rotor. La vitesse de l'air au niveau de cet élément de pale, dans le référentiel en rotation lié à la pale, est :  $V_{Bl} = \sqrt{w_{Bl}^2 + (r\omega)^2}$

Dans l'hypothèse d'autorotation, seules les forces exercées par l'air s'appliquent sur l'hélice. En particulier il n'y a pas de couple supplémentaire appliqué au niveau de l'axe.

On se place dans l'approximation des petits angles. L'angle  $\varphi_{Bl}$  est donné par :  $\varphi_{Bl} = \arctan\left(\frac{w_{Bl}}{r\omega}\right) \simeq \frac{w_{Bl}}{r\omega}$ .

Les forces s'exerçant sur cet élément s'écrivent :

— projection sur  $\vec{e}_\theta$  :  $dF_z \sin(\varphi_{Bl}) - dF_d \cos(\varphi_{Bl})$  soit :

$$dF_z \varphi_{Bl} - dF_d = \frac{1}{2} \rho \cdot dr \cdot t \cdot V_{Bl}^2 \cdot (C_z \varphi_{Bl} - C_d)$$

— projection sur  $\vec{e}_z$  :  $dF_z \cos(\varphi_{Bl}) + dF_d \sin(\varphi_{Bl})$  soit :

$$dF_z = \frac{1}{2} \rho \cdot dr \cdot t \cdot V_{Bl}^2 \cdot C_z$$

On calcule ainsi le moment des forces par rapport à l'axe de rotation du rotor :

$$d\mathcal{M} = \frac{1}{2} \rho \cdot t \cdot V_{Bl}^2 \cdot (C_z \varphi_{Bl} - C_d) \cdot r \cdot dr$$

Donc :

$$\mathcal{M} = 2 \int_0^R d\mathcal{M} = \int_0^R \rho \cdot t \cdot V_{Bl}^2 \cdot (C_z \varphi_{Bl} - C_d) \cdot r \cdot dr$$

et la portance :

$$F_R = 2 \int_0^R dF_z = \int_0^R \rho \cdot t \cdot V_{Bl}^2 \cdot C_z \cdot dr$$

On fait l'hypothèse que  $w_{Bl}$  ne dépend pas de  $r$ , ie que la vitesse de l'air à travers l'hélice est uniforme.

Les coefficients de portance  $C_z$  et de traînée  $C_d$  apparaissant dans les expressions précédentes sont des fonctions de  $\alpha_{Bl}$  donc de  $\varphi_{Bl}$  et ainsi de  $r$ .

**Remarque :**

La détermination de la polaire du profil est expérimentale. Les incidences restant faibles, on approximera les profils par des fonctions affines. On donne ainsi, selon la théorie des profils minces :

$$C_z \simeq C_{z_0} + 2\pi\alpha$$

$$C_z \simeq n \cdot C_d$$

Pour l'autogire de référence, les valeurs numériques sont données en **Annexes**.

Lors de la chute verticale, en régime stationnaire, l'autogire a une vitesse constante. On alors  $F_R = mg$  où  $m$  est la masse de l'autogire et  $g$  l'accélération de la pesanteur.

### 2.3 Vitesse de l'air à travers le rotor $w_{Bl}$

On se propose dans cette sous-partie d'exploiter la condition d'autorotation afin d'obtenir une relation entre la vitesse de l'air à travers le rotor  $w_{Bl}$  et la vitesse de rotation du rotor  $\omega$ .

On fait l'approximation suivante :  $V_{Bl} \simeq r\omega$  et  $\varphi_{Bl} \simeq \frac{w_{Bl}}{r\omega}$ .

En régime stationnaire :  $\mathcal{M} = 0$ .

En développant le calcul de  $\mathcal{M}$ , on obtient :

$$w_{Bl} = R\omega \cdot \underbrace{\frac{1}{6\pi} \left( - \left( C_{z_0} + 2\pi \left( \varepsilon - \frac{1}{n} \right) \right) + \sqrt{\left( C_{z_0} + 2\pi \left( \varepsilon - \frac{1}{n} \right) \right)^2 + \frac{9\pi}{n} \left( C_{z_0} + 2\pi \left( \varepsilon - \frac{1}{n} \right) \right)} \right)}_{K_{w_{Bl}}}$$

Soit :

$$w_{Bl} = K_{w_{Bl}} \cdot R \cdot \omega$$

### 2.4 Vitesse induite $w_{Ri}$

La théorie de Rankine-Froude montre qu'en vol stationnaire, la vitesse induite de l'air à travers le rotor est :  $w_{Ri} = \sqrt{\frac{F_R}{2\rho\pi R^2}}$ . Cette théorie ne convient pas pour décrire un vol descendant en autorotation. On généralise en première approximation ces expressions en convenant que les dépendances en  $F_R$ ,  $R$  et  $\rho$  restent pertinentes dans le cas des vols étudiés. Alors, on a :

$$w_{Ri} = K_{w_{Ri}} \sqrt{\frac{F_R}{\rho\pi R^2}}$$

où  $K_{w_{Ri}}$  est un coefficient adimensionné dépendant du profil.

### 2.5 Expression de $\omega$ en fonction de $F_R$

La portance s'exprime par :

$$\begin{aligned} F_R &= 2 \int_0^R dF_z = \rho \cdot t \int_0^R (C_{z_0} + 2\pi(\varepsilon + \frac{w_{Bl}}{r\omega}))\omega^2 r^2 dr \\ &= \rho \cdot t \left( \frac{C_{z_0} + 2\pi\varepsilon}{3} R^3 \omega^2 + 2\pi w_{Bl} \omega \frac{R^2}{2} \right) \\ F_R &= R^3 \omega^2 \rho t \underbrace{\left( \frac{C_{z_0} + 2\pi\varepsilon}{3} + \pi K_{w_{Bl}} \right)}_{K_{z_0}} \end{aligned} \tag{1}$$

On obtient finalement :

$$\omega = \sqrt{\frac{F_R}{K_{z_0} \rho t R^3}}$$

Ainsi en régime stationnaire, en chute à vitesse constante on a :

$$\omega = \sqrt{\frac{mg}{K_{z_0} \rho t R^3}}$$

## 2.6 Expression de $V$ en fonction de $F_R$

On en déduit la vitesse de chute :

$$V = w_{Bl} + w_{Ri}$$

$$V = K_{w_{Bl}} R \omega + K_{w_{Ri}} \sqrt{\frac{F_R}{\rho \pi R^2}}$$

Ainsi, on a :

$$V = K_{w_{Bl}} \sqrt{\frac{mg}{K_{z_0} \rho t R}} + K_{w_{Ri}} \sqrt{\frac{mg}{\rho \pi R^2}}$$

## 3 Approche informatique du régime transitoire

L'étude précédente s'intéresse aux caractéristiques du régime stationnaire du vol vertical en autorotation. Afin d'appréhender le régime transitoire et l'établissement du régime stationnaire, on réalise sur Python la résolution numérique des équations du mouvement de l'hélice, à l'aide des expressions du moment  $\mathcal{M}$  et de la portance  $F_z$  déterminées précédemment. Les équations du mouvement sont alors :

$$m\dot{V} = mg - F_z \quad \text{et} \quad J\dot{\omega} = \mathcal{M}$$

où  $m$  désigne la masse de l'autogire,  $J$  le moment d'inertie des pâles par rapport à l'axe de rotation.

On obtient pour une hélice d'un autogire de référence (dont les caractéristiques sont données en **annexes**) les courbes d'évolution suivantes :

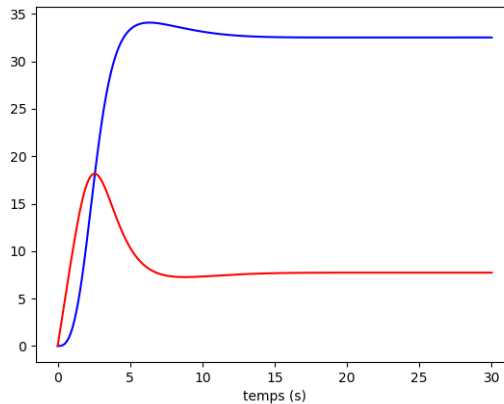


FIGURE 2 – Simulation numérique du régime transitoire (En bleu,  $\omega$  en  $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , en rouge,  $V$  en  $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )

Le régime stationnaire, s'établit donc, sur une durée de l'ordre de 10 secondes.

## 4 Etude expérimentale de l'autorotation d'une hélice en vol vertical

On cherche à mettre en évidence l'influence de la masse sur les vitesses de chute et de rotation d'un rotor lors d'une chute libre.

On réalise le protocole expérimental représenté sur la figure ci dessous :

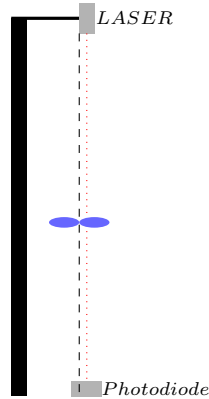


FIGURE 3 – Montage expérimental

On tend un fil sur une hauteur suffisante, à la verticale. Dans l'alignement et à proximité du fil, on allume un laser dont le faisceau pointe sur une photodiode située au sol.

On attache différentes masselottes à une petite hélice, puis on insère le fil dans un trou au centre de l'hélice. On lâche l'hélice lestée : celle-ci chute, guidée par le fil, et se met en rotation autour d'elle-même par phénomène d'autorotation. A chaque tour, la pale de l'hélice cache le faisceau laser. On mesure alors ces "extinctions" en enregistrant la tension aux bornes de la photodiode. On détermine ainsi la vitesse de rotation de l'hélice, tout en s'assurant que le régime stationnaire est bien atteint. A l'aide d'une caméra ultra rapide (suivi d'un logiciel de pointage), on mesure la vitesse de chute de l'hélice.

Afin d'augmenter la sensibilité, on ne mesure pas directement la tension aux bornes de la photodiode. On réalise un montage amplificateur en branchant en série la photodiode avec une résistance importante (10 k $\Omega$ ) et une alimentation stabilisée. On déduit de même la vitesse de rotation  $\omega$  : les chutes de tension (*i.e.* de courant) correspondent aux passages de l'hélice devant le faisceau (voir enregistrement en **Annexes**).

Les mesures réalisées sont résumées dans le tableau suivant :

masse (en g)	vitesse de rotation $\omega$ (en rad·s <sup>-1</sup> )	vitesse de chute $V$ (en unités arbitraires)
1,60	125,4	10,5
2,64	145,3	11,9
3,64	162,6	13,3
4,68	179,0	14,9
9,37	241,7	19,8

**Remarque :** On estime l'incertitude sur les valeurs de  $V$  et  $\omega$  par :

$$\Delta V = 0.5 \text{ ua} \quad \text{et} \quad \Delta \omega = 1 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

On exploite alors ces mesures en traçant  $\omega$  et  $V$  en fonction de  $\sqrt{m}$ . Les courbes obtenues sont les suivantes :

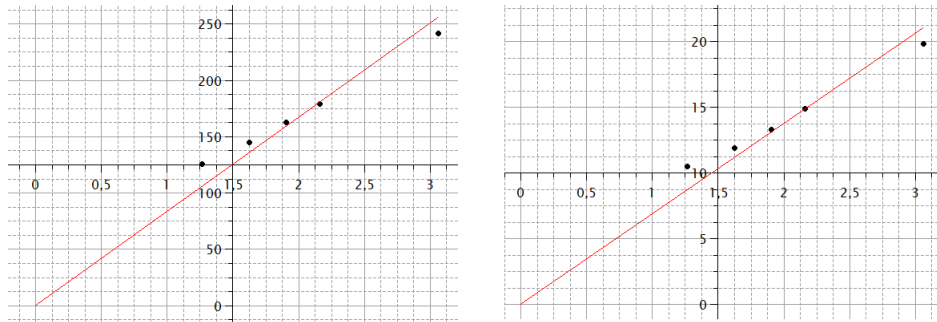


FIGURE 4 – Résultats expérimentaux : à gauche,  $\omega$  (en  $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ) en fonction de  $\sqrt{m}$  (en  $\text{g}^{1/2}$ ); à droite,  $V$  (en unités arbitraires) en fonction de  $\sqrt{m}$

*Nota Bene : données exploitées avec les logiciels Pymecavideo, LatisPro et QtiPlot.*

Les résultats sont cohérents avec le modèle précédent. On retrouve en effet expérimentalement relativement bien une relation linéaire entre  $\omega$  (ou  $V$ ) et  $\sqrt{m}$ .

Compte-tenu des faibles dimensions de l'hélice utilisée pour l'expérience et des efforts peu importants qui s'y exercent, on peut bien négliger l'élasticité des pâles. Les vitesses de rotation atteintes en régime stationnaire étant très importantes, il apparaît légitime de considérer les incidences faibles dans le modèle.

Pour autant, différentes sources d'écarts au modèle théorique sont envisageables :

- des frottements exercés par le fil tendu, ici négligés, peuvent intervenir lors de la chute de l'hélice autour du fil.
- pâles de corde variables

En outre, le matériel disponible ne m'a pas permis de déterminer la polaire du profil de l'hélice utilisée, ni de pousser plus loin la vérification expérimentale du modèle théorique, en faisant varier  $R$  par exemple. En réalisant des prototypes plus proches d'un réel autogire, on pourrait ainsi faire varier davantage de paramètres et déterminer expérimentalement les valeurs des constantes apparaissant dans la modélisation ( $K_{z_0}$ ,  $K_{w_{Ri}}$ ...).

## 5 Etude théorique du vol horizontal

### 5.1 Présentation et notations supplémentaires

Lors du vol horizontal, l'hélice reçoit un flux d'air de l'avant et non d'en dessous comme lors du vol vertical. L'écoulement au niveau de l'hélice est asymétrique comme somme des mouvements de rotation des pâles et du mouvement considéré rectiligne uniforme de l'autogire. Il y a alors une asymétrie entre les deux pâles, les forces s'appliquant sur les pales n'étant pas égales. Ceci pose des problèmes pour le fonctionnement de l'autogire. Afin de palier les problèmes dus à l'asymétrie, les ingénieurs ont mis en place un système de battement des pales : les pâles sont liées à l'axe de l'hélice par une liaison pivot d'axe orthogonal à l'axe de rotation de l'hélice, autorisant ainsi un mouvement de battement (dans la limite de la course autorisée par la liaison).

Dans cette partie, on étudie une hélice d'autogire lors d'une phase de vol horizontal. Grâce à un rotor (non étudié ici) placé à l'avant, l'autogire avance horizontalement à la vitesse constante  $V$  (qui est désormais une donnée du problème). Le plan de rotation du rotor fait alors un angle  $\theta$  avec l'horizontale. On repère la

position de la pale dans le plan de rotation du rotor par l'angle  $\psi_{Bl}$ .

**NB :** Les paramètres non redéfinis ici sont les mêmes que dans les parties précédentes.

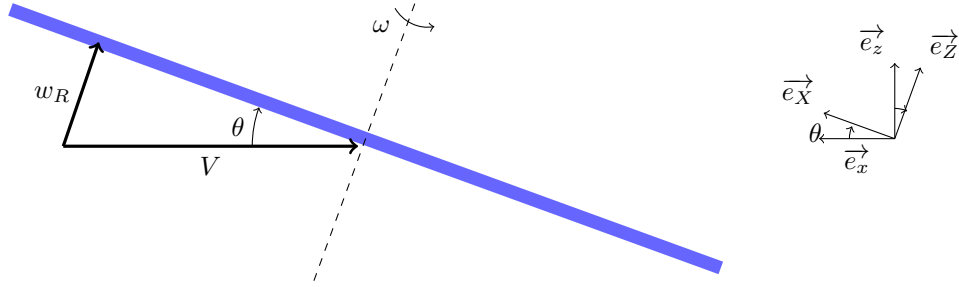


FIGURE 5 – Paramétrage de l'hélice en vol horizontal - vue transversale

La vitesse induite par le rotor et la vitesse du vent à travers le rotor sont liées par :

$$w_R = V \sin(\theta) = w_{Ri} + w_{Bl}$$

La dynamique du rotor est ainsi nettement plus complexe dans le cas du mouvement horizontal. On se limitera dans un premier temps à des modèles simplifiés généralisant le modèle établi pour le vol vertical.

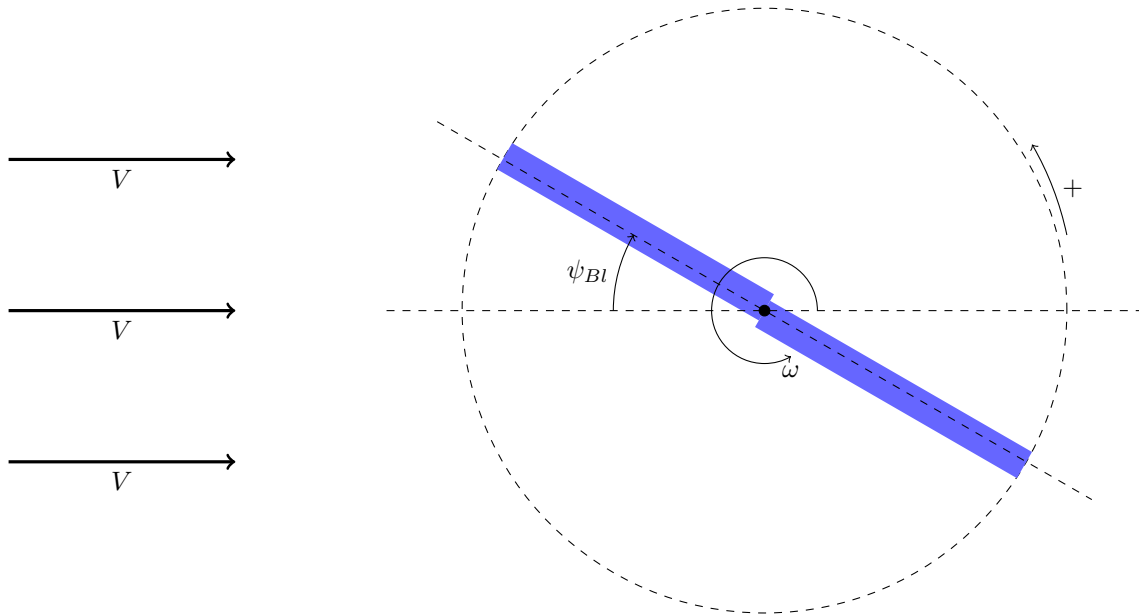


FIGURE 6 – Paramétrage de l'hélice en vol horizontal - vue de haut

## 5.2 Dynamique de battement des pâles et hypothèses simplificatrices

Lorsque la pôle avance par rapport à l'air (*i.e.* :  $\pi \leq \psi_{Bl} \leq 2\pi$ ), elle subit une force de portance plus important que lorsqu'elle recule. On note  $\beta$  l'angle de battement de la pôle.

L'angle  $\beta$  évolue périodiquement à la pulsation  $\omega$ . On fait l'approximation :

$$\beta = \beta_m \cos(\psi_{Bl}) = \beta_m \cos(\omega t + c)$$

En fait, on peut voir le mouvement de battements des pâles de la manière suivante : les pâles tournent dans un plan incliné de  $\beta_m$  par rapport au plan dit de rotation du rotor (orthogonal au mat).

Deux situations particulières (simples) seront étudiées par la suite : pâles avant/arrière et pâles gauche/droite.

#### Pâles avant et arrière ( $\psi_{Bl} = 0$ ou $\pi$ )

La vitesse du vent sur un élément de pôle situé à  $r$  de l'axe se décompose en :

- $r\omega$  selon  $\vec{e}_{\theta}$
- $w_{Bl} + V\beta_m = V(\theta + \beta_m) - w_{Ri}$  selon  $\vec{e}_z$

#### Pôle avançant ( $\psi_{Bl} = \frac{3\pi}{2}$ )

En raison du battement de la pôle ( $\dot{\beta} = \omega\beta_m$ ), la vitesse du vent sur un élément de pôle situé à  $r$  de l'axe se décompose en :

- $r\omega + V$  selon  $\vec{e}_{\theta}$
- $w_{Bl} - r\omega\beta_m$  selon  $\vec{e}_z$

#### Pôle reculant ( $\psi_{Bl} = \frac{\pi}{2}$ )

En raison du battement de la pôle ( $\dot{\beta} = -\omega\beta_m$ ), la vitesse du vent sur un élément de pôle situé à  $r$  de l'axe se décompose en :

- $r\omega - V$  selon  $\vec{e}_{\theta}$
- $w_{Bl} + r\omega\beta_m$  selon  $\vec{e}_z$

### 5.3 Angle de battement des pâles $\beta_m$

On calcule le moment total des forces par rapport à l'axe de battement dans la situation gauche/droite. La puissance sur cet arbre doit être nulle, *i.e.* le moment calculé est nul.

On calcule les moments des forces s'appliquant sur les pâles dans la situation  $\psi_{Bl} = \pi/2$ . On néglige le moment des forces d'inertie d'entraînement devant celles des forces dues à l'air. Le moment des forces aérodynamiques s'exerçant sur la pôle avançant s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{av} &= \frac{1}{2}\rho t \int_0^R (C_{z_0} + 2\pi(\varepsilon + \varphi_{Bl}))((r\omega + V)^2 + \underbrace{(w_{Bl} - \beta_m r\omega)^2}_{\text{néglige}}).r.dr \\ &= \frac{1}{2}\rho t \int_0^R (C_{z_0} + 2\pi\varepsilon)(r\omega + V)^2 r.dr + \pi\rho t \int_0^R (r\omega + V)(w_{Bl} - \beta_m r\omega)r.dr \end{aligned} \quad (2)$$

Et pour la pôle reculant :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{re} &= \frac{1}{2}\rho t \int_0^R (C_{z_0} + 2\pi(\varepsilon + \varphi_{Bl}))((r\omega - V)^2 + \underbrace{(w_{Bl} + \beta_m r\omega)^2}_{\text{néglige}}).r.dr \\ &= \frac{1}{2}\rho t \int_0^R (C_{z_0} + 2\pi\varepsilon)(r\omega - V)^2 r.dr + \pi\rho t \int_0^R (r\omega - V)(w_{Bl} + \beta_m r\omega)r.dr \end{aligned} \quad (3)$$

Comme la somme des moments qui s'appliquent sur l'axe de battement est nulle, on a  $\mathcal{M}_{av} = \mathcal{M}_{re}$ , *ie* :

$$\int_0^R (C_{z_0} + 2\pi\varepsilon).2\omega V r^2 dr + 2\pi \int_0^R (-2r^2\omega^2\beta_m + 2Vw_{Bl})r.dr = 0$$



D'où avec  $w_{Bl} \simeq K_{w_{Bl}} R \omega$  :

$$\frac{C_{z_0} + 2\pi\varepsilon}{3} R \omega V + \pi K_{w_{Bl}} R \omega V = \frac{\pi}{2} \omega^2 R^2 \beta_m$$

Donc finalement :

$$\beta_m = K_\beta \frac{V}{R\omega} \quad \text{où : } K_\beta = \frac{2}{\pi} K_{z_0}$$

## 5.4 Composante normale de la vitesse à travers le rotor $w_{Bl}$

La condition d'autorotation en régime stationnaire consiste toujours en un moment nul par rapport à l'axe de rotation de l'hélice.

On considère que la vitesse de l'air à travers le rotor est uniforme sur la surface du rotor. On considère qu'elle varie peu lors d'une période de rotation. Les angles de battement étant faibles, le calcul de  $w_{Bl}$  à partir des moments des forces aérodynamiques par rapport à l'axe de rotation de l'hélice est analogue à celui réalisé en **2.3**. Ainsi, on a toujours :

$$w_{Bl} = K_{w_{Bl}} \cdot R \cdot \omega$$

## 5.5 Vitesse de rotation $\omega$

Compte-tenu du battement des pâles, la portance obtenue par l'hélice principale varie légèrement au cours d'une période de rotation. On note  $F_R = \langle F_z \rangle$  la portance moyenne. En régime stationnaire, on aura :  $F_R = mg$

On a alors :

$$F_R \simeq \frac{F_z(\psi_{Bl} = 0) + F_z(\psi_{Bl} = \frac{\pi}{2})}{2}$$

Dans la situation pâles avant/arrière (ie  $\psi_{Bl} = 0$ ), les calculs étant analogues à ceux du vol en chute verticale, on a :

$$F_z(\psi_{Bl} = 0) = K_{z_0} \rho t R^3 \omega^2$$

Dans la situation pâles avançant/reculant (ie  $\psi_{Bl} = \frac{\pi}{2}$ ), on a en développant les calculs :

$$F_z(\psi_{Bl} = \frac{\pi}{2}) = \rho t R^3 \omega^2 \left( K_{z_0} - \pi \beta_m \frac{V}{R\omega} + (C_{z_0} + 2\pi\varepsilon) \left( \frac{V}{R\omega} \right)^2 \right)$$

D'où en posant  $\mu = \frac{V}{R\omega}$  :

$$F_R = \rho t R^3 \omega^2 (K_{z_0} + K_{z_2} \mu^2)$$

avec :  $K_{z_2} = \frac{1}{2} (C_{z_0} + 2\pi\varepsilon - \pi K_\beta)$

On obtient finalement l'expression de  $\omega$  en fonction de  $F_R = mg$  et  $V$  :

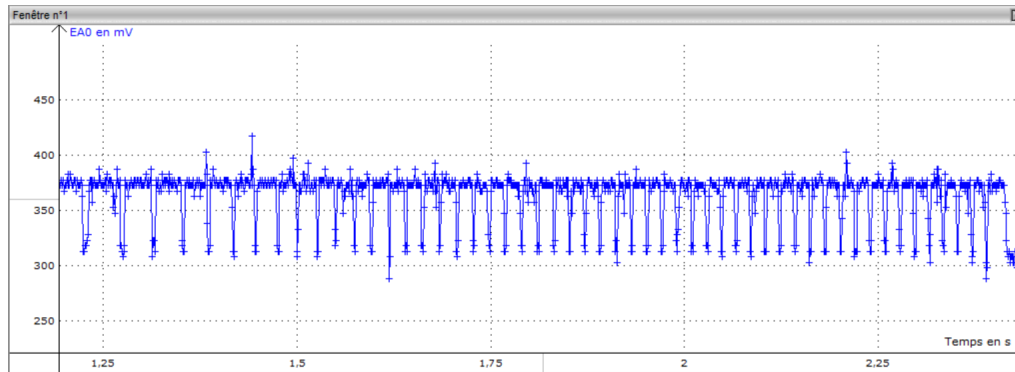
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{K_{z_0}} \left( \frac{F_R}{\rho t R^3} - K_{z_2} \frac{V^2}{R^2} \right)}$$

## 6 Annexes

Données numériques pour le rotor de référence :

$m$	392 kg	$\varepsilon$	2,5°
$J$	189 kg.m <sup>2</sup>	$C_{z_0}$	0,24
$R$	4,2 m	$n$	80
$t$	0,20 m		

Exemple d'enregistrement de la tension aux bornes de la résistance lors de la chute de l'hélice permettant de mesurer la vitesse de rotation :



## 7 Bibliographie

- (1) Hermann Glauert : A General Theory of the Autogyro : Reports and Memoranda No. 1111, 1926
- (2) J. Gordon Leishman : Development of the Autogiro : A Technical Perspective : Journal of Aircraft, Vol. 41, No. 4, 2004
- (3) Holger Duda, Jörg Seewald : Flugphysik der Tragschrauber : Verstehen und Berechnen : Chapitres 2 et 3, Springer Vieweg, 2016, <https://doi.org/10.1007/978-3-662-52834-1>
- (4) A. Nikolsky, Edward Seckel : An analytical study of the steady vertical descent in autorotation of single-rotor helicopters : NACA Technical Note No. 1906, 1948
- (5) Wayne Johnson : Helicopter Theory : Chapitres 2 et 3, Dover Publications Inc. , 1995, 9780-486-68230-3
- (6) D. Rezgui, M. H. Lowenberg : On the nonlinear dynamics of a rotor in autorotation : a combined experimental and numerical approach : Phil. Trans. R. Soc. A 373, 2015, 20140411, <http://dx.doi.org/10.1098/rsta.2014.0411>