TIPE : GÉNÉRATION DE PERMUTATIONS AVEC PLUSIEURS PILES EN PARALLÈLE

Corentin GENTIL

2018-2019

1 Introduction

L'objectif de ce document est de présenter les permutations *stack-sortable*, et d'en donner quelques propriétés. Nous étudierons d'abord le cas le plus simple que l'on sait décrire : celui d'une seule pile. Puis nous donnerons un théorème général, que nous approfondirons dans quelques cas particuliers.

2 Présentation du problème

Définition. Une **pile** est une structure dynamique dans laquelle on peut ajouter et supprimer des éléments selon le principe Last In - First Out. On note **push** l'opération "rentrer un élément" et **pop** l'opération "sortir un élément". (voir figure 1)

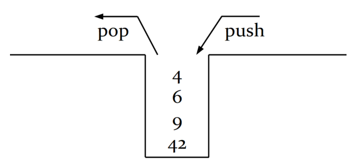

Figure 1: Schéma de fonctionnement d'une pile.

L'un des problèmes que nous étudierons est le suivant : pour $n \geq 2$ et $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on dispose les entiers de 1 à n dans l'ordre $\sigma(1), ..., \sigma(n)$ sur le bord droit d'une pile. (voir figure 2)

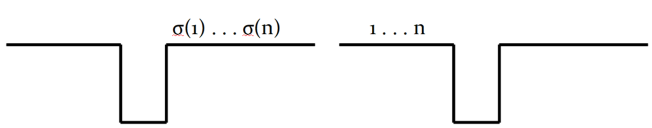

Figure 2: Configurations initiale (gauche) et finale (droite), la seconde étant obtenue à l'issue d'une séquence de *push* et de *pop*.

On cherche une séquence de *push* et de *pop* de manière à ce qu'ils soient dans l'ordre $1, ..., n$ sur le bord gauche.

Définition. Une permutation est **stack-sortable** s'il existe une séquence de *push* et de *pop* qui permet de transférer les entiers de 1 à n du bord droit au bord gauche, et telle qu'ils soient dans l'ordre $\sigma(1), ..., \sigma(n)$ au départ et $1, ..., n$ à l'arrivée.

Exemple. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $\sigma = \sigma(1)...\sigma(n)$. Soit $\sigma = 4132$.
σ est stack-sortable : la séquence *push push pop push push pop pop pop* convient. (voir figure 3)

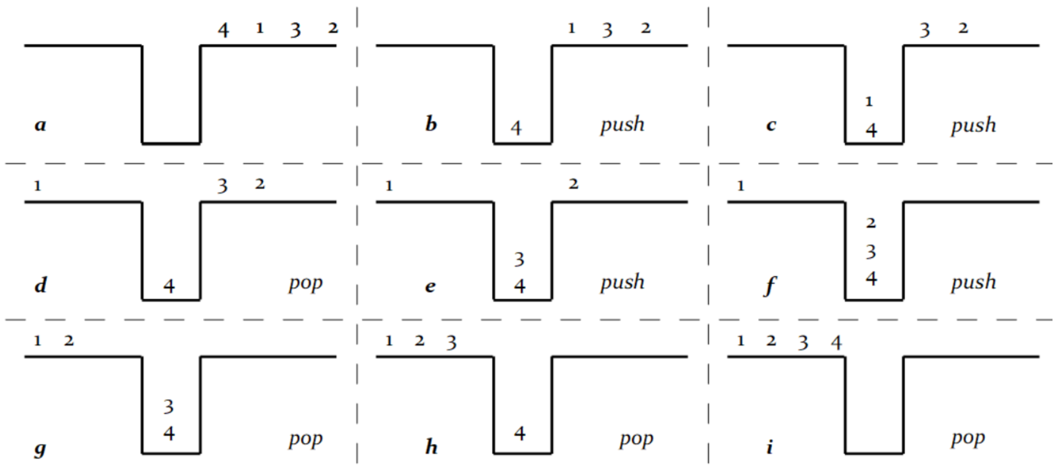

Figure 3: Réalisation de $\sigma = 4132$

En revanche, $\sigma = 231$ n'est pas stack-sortable. (voir figure 4)

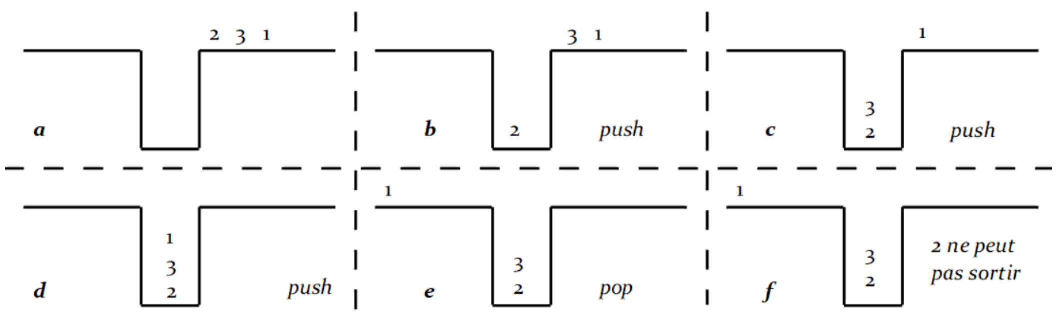

Figure 4: Une pile ne suffit pas pour réaliser $\sigma = 231$.

Définition. Soit $k \geq 2$. On dispose dorénavant de k piles en parallèle.
On définit les opérations $(push_i)_{1\leq i\leq k}$ et $(pop_i)_{1\leq i\leq k}$ correspondant respectivement à rentrer et sortir un élément de la $i-$ème pile. (voir figure 5)

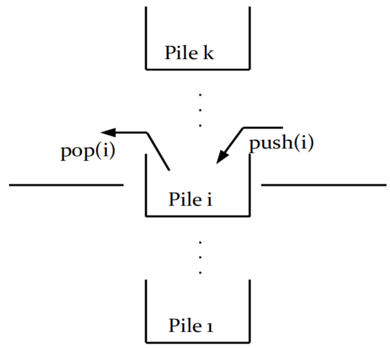

Figure 5: k piles en parallèle

Définition. Une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est **k-stack-sortable** s'il existe une séquence de $(push_i)_{1\leq i\leq k}$ et $(pop_i)_{1\leq i\leq k}$ qui permet de transférer les entiers de 1 à n du bord droit au bord gauche, et telle qu'ils soient dans l'ordre $1, ..., n$ à l'arrivée. Chaque élément doit passer par une et une seule pile.

Exemple. Soit $\sigma = 231$. σ n'est pas stack-sortable mais est 2-stack-sortable. (voir figure 6)

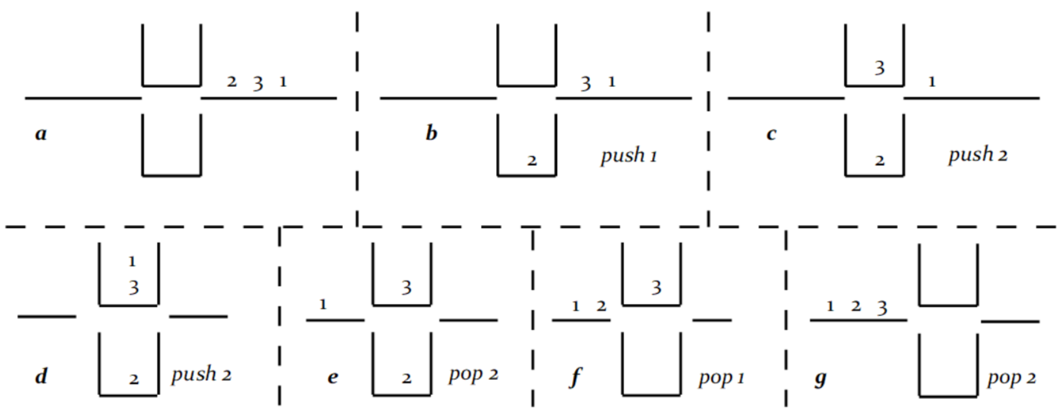

Figure 6: $\sigma = 231$ est 2-stack-sortable.

Remarque. Toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est n-stack-sortable : la séquence $push_{\sigma(1)}\ push_{\sigma(2)}\ ...\ push_{\sigma(n)}\ pop_1\ pop_2\ ...pop_n$ convient.
En effet, chaque élément i rentre dans la $i-$ème pile, et ils sortent donc dans l'ordre souhaité.

Problème. Nous chercherons un moyen de déterminer le nombre minimal de piles pour générer une permutation. Nous étudierons plus spécifiquement quelques cas particuliers.

3 Cas d'une seule pile

Remarque. Dans le cas d'une seule pile, la séquence qui génère une permutation, si elle existe, est unique.
Pour la trouver, on dispose d'un algorithme simple : si les entiers $1, ..., k$ sont déjà sortis sur le bord gauche (dans l'ordre !):

- Si $k+1$ est au sommet de la pile, on effectue *pop*
- Si $k+1$ est sur le bord droit : on effectue *push* tant que $k+1$ n'est pas au sommet de la pile
- Sinon, $k+1$ est dans la pile mais pas au sommet : il est "coincé", et la permutation n'est pas stack-sortable.

Définition. Soit $2 \leq p < n$, $\pi \in \mathcal{S}_p, \sigma \in \mathcal{S}_n$.
On dit que π est incluse dans σ (noté $\pi \lhd \sigma$), s'il existe $a_{\pi(1)} < ... < a_{\pi(p)} \leq n$, tels que $\sigma(a_1) < ... < \sigma(a_p)$.

D'un autre point de vue, il s'agit de trouver un p-uplet d'éléments $\sigma(a_1), ..., \sigma(a_p)$, dont les positions relatives sur les bords droit et gauche seront échangées de la même façon que pour π entre les configurations initiale et finale. (voir figure 7)

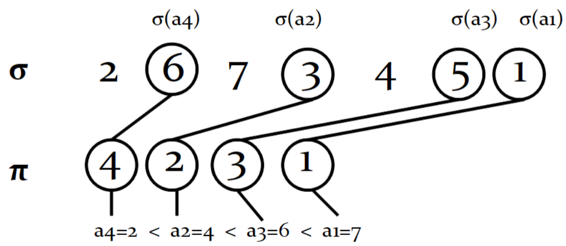

Figure 7: Pour $\pi = 4231$ et $\sigma = 2673451$, dont les configurations initiales sont représentées en plus gros, on a $\pi \prec \sigma$.

Lemme. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Si σ est stack-sortable, toute permutation incluse dans σ l'est aussi.

Théorème. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. σ est stack-sortable **si et seulement si** $(2,3,1) \ntriangleleft \sigma$. [1]

Preuve. ($\Rightarrow$) Si σ est stack-sortable et que $(2,3,1) \lhd \sigma$, alors $(2,3,1)$ serait stack-sortable d'après le lemme.

($\Leftarrow$) Si σ n'est pas stack-sortable, l'algorithme décrit plus haut ne fonctionne pas. Donc on dispose de k tel que $1, ..., k$ sont sortis, et $k+1$ est dans la pile sans en être au sommet.
Soit j un élément au dessus de $k+1$ (on a $k+1 < j$). Comme j est au dessus, $\sigma^{-1}(k+1) < \sigma^{-1}(j)$ (c'est-à-dire que $k+1$ était à gauche de j dans la configuration initiale).
De plus, si j est rentré dans la pile, c'est qu'il existe $i < k+1$ tel que $\sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(i)$. (voir figure 8)
En posant $a_2 = \sigma^{-1}(k+1) < a_3 = \sigma^{-1}(j) < a_1 = \sigma^{-1}(i)$, on a bien $\sigma(a_1) < \sigma(a_2) < \sigma(a_3)$

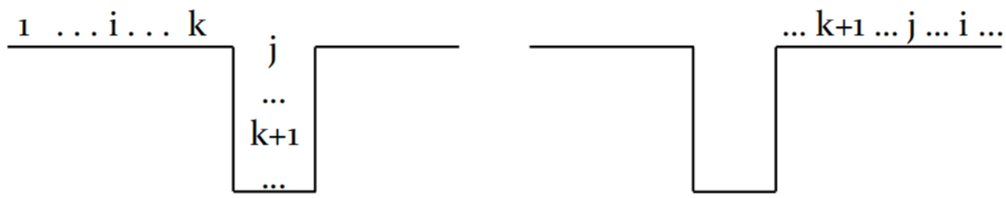

Figure 8: Positions relatives finales (gauche) et initiales (droite) du triplet $(i, j, k+1)$ invoqué dans la preuve : pour sortir i, il a fallu rentrer $k+1$ puis j dans la pile.

Remarque. Dénombrement. Les séquences de *push* et de *pop* qui génèrent une permutation sont des mots de Dyck sur l'alphabet $\{push, pop\}$. En effet, une séquence tronquée à droite contient toujours plus de *push* que de *pop*, et il y en a n de chaque.
Donc dans $\mathcal{S}_n$, il y a $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ permutations stack-sortable.
Si σ variable aléatoire sur $\mathcal{S}_n$ suivant la loi uniforme, un équivalent de la probabilité que σ soit une permutation stack-sortable est

$$p_n \sim \frac{4^n}{n!\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}} \sim \frac{(4e)^n}{\sqrt{2}\pi n^{n+2}}$$

4 Cas de plusieurs piles en parallèle

4.1 Théorème général

Définition. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Soit $\prec$ relation d'ordre stricte associée à σ telle que pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2, i \prec j$ si $\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)$.
Il s'agit de dire que i est à gauche de j dans la configuration initiale.

Définition. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On appelle graphe de σ le graphe **non orienté** $G[\sigma] = (S, A)$ avec :

- $S = [\![1;n]\!]$ l'ensemble des sommets.
- $A = \{(ij)$ tels que si $i < j$, alors $i \prec j$ et il existe $m < i$, vérifiant $j \prec m\}$, où l'on a identifié (i,j) et (j,i).

Définition. Soit $G = (S, A)$ un graphe. On appelle k-coloriage de G toute partition $S = \bigsqcup_{i=1}^{k} S_i$ avec
$\forall i \neq j, S_i \cap S_j = \emptyset$ et $\forall m \leq k, \forall a_i \neq a_j \in S_m, (a_i, a_j) \notin A$.
Pour un graphe de permutation, on peut identifier un k-coloriage à une fonction $c : [\![1;n]\!] \longrightarrow [\![1;k]\!]$, telle que pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2, c(i) = c(j) \Rightarrow (ij) \notin A$

Définition. Soit $G = (S, A)$ un graphe. On appelle **nombre chromatique** de G le plus petit entier k tel qu'existe un k-coloriage de G. On le note $\chi(G)$ dans la suite.

Théorème. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Le nombre de piles minimal pour générer σ est $\chi(G[\sigma])$. [2]

Remarque. Un coloriage c du graphe de σ permet de savoir comment générer σ en appliquant l'algorithme décrit dans le cas d'une pile en le modifiant légèrement : quand il faut rentrer un élément i, on le rentre dans la $c(i)-ième$ pile.

Preuve. D'une part, un coloriage de $G[\sigma]$ permet de générer σ : si $1, ..., k$ sont sortis et que par l'absurde $k+1$ n'est pas au sommet de sa pile, (donc recouvert par un certain j), alors, par un raisonnement analogue au cas d'une pile, on montre que $(k+1, j) \in A$.
D'autre part, une séquence qui génère σ fournit un coloriage de $G[\sigma]$: si deux sommets de S sont reliés, ils ne peuvent pas passer par la même pile : celui qui sort en premier serait recouvert.

4.2 Lien avec les graphes circulaires

Notation. On considère ici $\mathcal{C}$ un cercle quelconque.

Définition. Soit $G = (S, A)$ un graphe avec $S = [\![1;n]\!]$. On dit que G est circulaire s'il existe $C = (c_1, ..., c_n)$ un ensemble de n cordes de $\mathcal{C}$ telles que c_i et c_j se coupent si et seulement si $(ij) \in A$.

Exemple. Soit $G = ([\![1;5]\!], \{(12), (23), (24), (35), (45)\})$. G est circulaire. (voir figure 9)

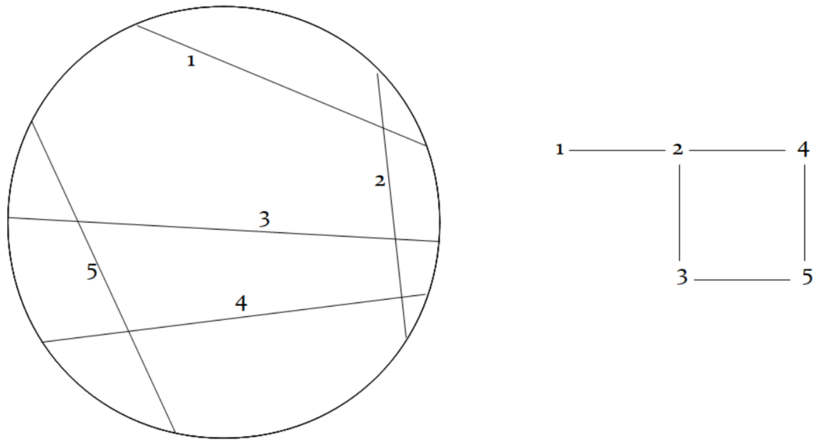

Figure 9: $G = (\llbracket 1;5 \rrbracket, \{(12),(23),(24),(35),(45)\})$ est circulaire.

Tous les graphes ne sont pas circulaires : $G = (\llbracket 1;6 \rrbracket, \{(12),(23),(34),(45),(51),(16),(26),(36),(46),(56)\})$ ne l'est pas. (voir figure 10)

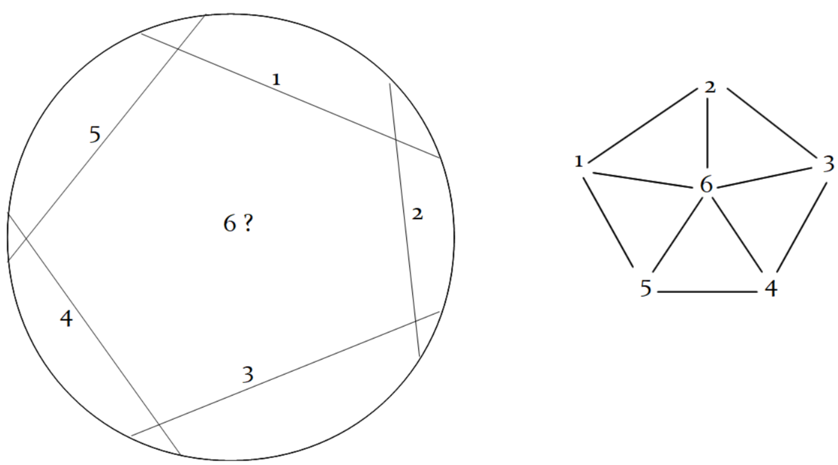

Figure 10: $G = (\llbracket 1;6 \rrbracket, \{(12),(23),(34),(45),(51),(16),(26),(36),(46),(56)\})$ n'est pas circulaire.

Théorème. Les graphes circulaires sont exactement les graphes de permutations. [2] (preuve en annexe)

Lemme. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. S'équivalent :

i $G[\sigma]$ contient un triangle (trois sommets sont reliés 2 a 2).

ii $(2341) \lhd \sigma$.

Preuve. $(ii \Rightarrow i)$ Si $\sigma(a_1) < \sigma(a_2) < \sigma(a_3) < \sigma(a_4)$ réalise l'inclusion de (2341), $\sigma(a_2), \sigma(a_3), \sigma(a_4)$ seront 2 à 2 reliés dans $G[\sigma]$.
$(i \Rightarrow ii)$ Soient $\sigma(a_2) < \sigma(a_3) < \sigma(a_4)$ un triangle de $G[\sigma]$. Soit $\sigma(a_1)$ qui assure l'existence de l'arête entre $\sigma(a_2)$ et $\sigma(a_4)$. Alors $\sigma(a_1) < \sigma(a_2) < \sigma(a_3) < \sigma(a_4)$ réalise l'inclusion de (2341) : d'où $(2341) \lhd \sigma$.

Théorème. **[ADMIS]**. Les graphes circulaires qui ne contiennent pas de triangle sont au plus 5-coloriable. [3]

Corollaire. Les permutations $\sigma \in \mathcal{S}_n$ vérifiant $(2341) \ntriangleleft \sigma$ sont toutes 5-stack-sortable (au plus).

5 Cas de deux piles en parallèle

5.1 Caractérisation par les motifs interdits

Remarque. Une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est 2-stack-sortable si et seulement si $G[\sigma]$ est 2-coloriable, c'est-à-dire biparti.

Définition. Soit $\sigma = i_1 i_2 ... i_n$ une permutation. On note $\sigma - i$ la permutation obtenue en enlevant i de la séquence de σ et en remplaçant j par $j-1$ pour tout $j > i$. Il s'agit d'une permutation de taille $n-1$ incluse dans σ.
On dit qu'une permutation σ est **critique** si elle n'est pas 2-stack-sortable mais que pour tout i, $\sigma - i$ l'est.
On dit qu'un élément i peut être **retiré** si $\sigma - i$ n'est pas 2-stack-sortable.

Remarque. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Si i est un sommet isolé dans le graphe $G[\sigma]$ et qu'il n'existe pas de (x, y) tel que $i < x < y$ et $x \prec y \prec i$, alors i peut être retiré.
En effet, dans ce cas, $G[\sigma] \simeq G[\sigma - i]$, car les arêtes déjà existantes sont conservées.

Propriété. Soit $G = (S, A)$ un graphe. G est biparti si et seulement si G ne possède pas de cycle de longueur impaire.

Propriété. Soit σ une permutation qui n'est pas 2-stack-sortable. Il existe π incluse dans σ ($\pi \triangleleft \sigma$) telle que π soit critique.

Preuve. σ n'est pas 2-stack-sortable. Soit π une permutation incluse dans σ qui ne soit pas 2-stack-sortable et de taille minimale. Toute permutation τ strictement incluse dans π est de taille strictement inférieure à la plus petite permutation incluse dans σ qui n'est pas 2-stack-sortable, donc τ est 2-stack-sortable. Donc π est critique.

Propriété. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ une permutation critique. $G[\sigma]$ est un cycle de longueur impaire, dont les sommets isolés forment une suite croissante $i_1 < ... < i_m$ vérifiant $i_1 \prec ... \prec i_m$, et $i_k \leq i_{k+1} - 2$.

Preuve. On sait que $G[\sigma]$ possède un cycle C de longueur impaire. Soit $E = \{m \in [\![1; n]\!]$ tels que $\exists i, j \in C$ vérifiant $m < i < j$ et $i \prec j \prec m\}$. On a $G \cup E = [\![1; n]\!]$.
Si $a \notin G \cup E$, $\sigma - a$ n'est pas 2-stack-sortable, car le cycle C est conservé. Contradiction car σ est supposée critique.
Soit $i \notin C$ tel que (ij) soit une arête de $G[\sigma]$. Soit m vérifiant ($i \prec j \prec m$ et $m < i < j$) ou ($j \prec i \prec m$ et $m < j < i$). i peut être retiré : si $x, y \in C$ tels que $x \prec y \prec i$ et $i < x < y$, on a aussi $x \prec y \prec m$ et $m < x < y$. Donc les seules arêtes sont celles du cycle.
Soit i, j deux sommets isolés. Si $i < j$ et $j \prec i$, j peut être retiré.
Enfin, si i et $i+1$ sont isolés, i peut être retiré.

En étudiant de façon plus approfondie les permutations critiques, on peut déduire le théorème suivant :

Théorème. **[ADMIS]** Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. σ est 2-stack-sortable si et seulement si σ ne contient pas les permutations :

- (π_k) : $2(2k+1)4153...(2i)(2i-3)...(2k+2)(2k-1)$, pour k impair.
- (σ_k) : $(2k+3)2(2k+5)41...(2i)(2i-3)...(2k+4)(2k+1)$, pour k impair. [6]

5.2 Dénombrement

Notation. Dans cette sous-partie, $A = \{(0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)\}$ désigne l'ensemble des déplacements élémentaires sur le plan $\mathbb{Z}^2$.

Définition. Pour $n \geq 1$, on appelle boucle du plan $\mathbb{N}^2$ de taille $2n$ tout $2n$-uplet
$((0,0), (x_1, y_1), ..., (x_{2n-1}, y_{2n-1})) \in \mathbb{N}^{2^{2n}}$ tel que

- $\forall i \leq 2n-2, (x_{i+1}, y_{i+1}) - (x_i, yi) \in A$
- $(x_{2n-1}, y_{2n-1}) = (0,0)$

Autrement dit, il s'agit des chemins de $2n$ pas dans le réseau $\mathbb{N}^2$ commençant et finissant à l'origine.

Remarque. En associant $push_1$ à $(1,0)$, $push_2$ à $(0,1)$, pop_1 à $(-1,0)$ et pop_2 à $(0,-1)$, on construit une bijection évidente entre les séquences valides (qui réalisent une permutation) de $(push_i)_{1\leq i\leq 2}$ et $(pop_i)_{1\leq i\leq 2}$, et les boucles du plan $\mathbb{N}^2$. [4]
Ainsi, le nombre de permutations 2-stack-sortable de $\mathcal{S}_n$ est majoré par le nombre de boucles du plan de taille $2n$. (voir figure 11).

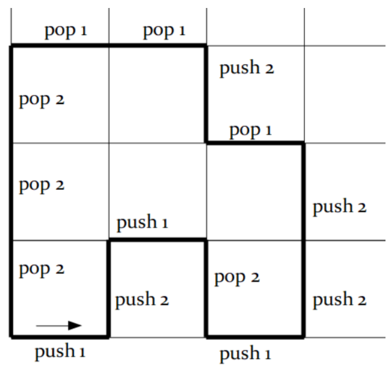

Figure 11: Exemple de correspondance entre les déplacements et les opérations élémentaires

Notation. Pour $(x,y) \in \mathbb{N}^2$, et $n \geq 1$, notons $w_n(x,y)$ le nombre de chemin de taille n menant de $(0,0)$ à (x,y). En particulier si $x+y$ et n n'ont pas la même parité, $w_n(x,y) = 0$. (voir figure 12).
On s'intéresse donc à la suite $(w_{2n}(0,0))_{n\geq 1}$.

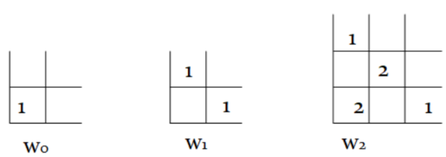

Figure 12: Premières valeurs de w, les cases (x,y) vides sont celles pour lesquelles $w_n(x,y) = 0$.

Notation. Pour $(x,y) \in \mathbb{N}^2$, et $n \in \mathbb{N}$, soit $r = \frac{1}{2}(n+x-y)$ et $s = \frac{1}{2}(n-x-y)$.

Remarque. En adoptant la convention $w_n(x,y) = 0$ si $(x,y) \notin \mathbb{N}^2$, on a la formule de récurrence suivante :
Pour $(x,y) \in \mathbb{N}^2$, $n \geq 1$,

$$w_{n+1}(x,y) = w_n(x-1,y) + w_n(x+1,y) + w_n(x,y-1) + w_n(x,y+1)$$

Propriété. Soit $(x,y) \in \mathbb{N}^2$, $n \geq 1$. On a [5]

$$w_n(x,y) = \binom{n}{r}\binom{n+2}{s} - \binom{n+2}{r+1}\binom{n}{s-1}$$

Cette formule reste vraie si $\binom{n}{k} = 0$ pour $k \notin [\![0;n]\!]$.
(preuve en annexe).

Propriété. Pour $n \geq 1$, $w_{2n}(0,0) = C_n C_{n+1}$. (preuve en annexe)

Remarque. Ici, plusieurs séquences peuvent réaliser la même permutation, donc nous n'avons pas dénombré le nombre de permutations 2-stack-sortable mais le nombre de séquences.
Quand $n \longrightarrow \infty$, le nombre de séquences vérifie :

$$w_{2n}(0,0) \sim \frac{4^{2n+1}}{\pi n^3}$$

6 Conclusion

La question qui suit le dénombrement des séquences correctes dans le cas de deux piles est celle du dénombrement des permutations 2-stack-sortable. Bien plus difficile, elle nécessite de définir une séquence représentative pour chaque permutation (il y a au moins 2 séquences par permutation). Il est ensuite possible d'établir des équations fonctionnelles vérifiées par la série génératrice associée à la suite des permutations 2-stack-sortable de $\mathcal{S}_n$.

7 Bibliographie

[1] Étienne GHYS, **A singular mathematical promenade**, Patterns and permutations, Donald Knuth,17-26, ENS Éditions, 2017
[2] S. EVEN, A. ITAI, **Queues, stacks and graphs**, 1-9 1971
[3] A. AGEEV **A triangle-free circle graph with chromatic number 5**, 1996
[4] Michael ALBERT, Mireille BOUSQUET-MÉLOU, **Permutations sortable by two stacks in parallel and quarter plane walks**, 1-11, 2014
[5] Richard K. GUY, **Journal of integers sequences**, Article 00.1.6, Vol 3, 2000
[6] Tero HARJU, Lucian ILIE, **Sorting permutations on two parallel stacks**, 1998

8 Annexes : preuves

8.1 Graphes circulaires

Théorème. Aux sommets isolés près, les graphes circulaires sont exactement les graphes de permutations.

Remarque. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Rappelons que le graphe de σ est constitué des arêtes $A = \{(ij)$ tels que si $i < j$, alors $i \prec j$ et il existe $m < i$, vérifiant $j \prec m\}$. Il s'agit donc **exactement** des couples $(\sigma(a_2)\sigma(a_3))$ tels qu'existe $\sigma(a_1)$ tel que le triplet $a_2 < a_3 < a_1$ réalise l'inclusion de la séquence (231) dans σ, c'est-à-dire $\sigma(a_1) < \sigma(a_2) < \sigma(a_3)$.

Donc en notant, pour $\pi \in \mathcal{S}_n$, $\tilde{G}(\pi) = ([\![1;n]\!], \{(ij)$ tels que $i < j$, $i \prec j$, et il existe m tel que $m > j$ et $m \prec i$ $\})$, on a $\tilde{G}(\sigma^{-1}) \simeq G[\sigma]$: les deux graphes ont la même structure, il suffit de changer les sommets de $\tilde{G}(\sigma^{-1})$ par leur image par σ^{-1} pour avoir égalité.

Ainsi, il suffit de prouver que les graphes $\tilde{G}(\sigma)$ sont circulaires, et qu'un graphe circulaire est de la forme $\tilde{G}(\pi)$, puis en écrivant $\pi = \sigma^{-1}$, on aura bien un graphe de permutation.

Preuve. ($\Rightarrow$) Soit $G = (S, A)$ un graphe circulaire, avec $S = [\![1; n]\!]$, et $\mathcal{C}$ un cercle où sont tracées n cordes. Construisons σ telle que $G[\sigma] = G$ (a priori, $\sigma \in \mathcal{S}_{n+k}$ avec $k \geq 0$ car on cherche un graphe de même structure, donc il est possible de rajouter des sommets isolés).
Considérons l'algorithme suivant : (voir figure 13 pour sa mise en œuvre)

1. On choisit un point Q du cercle qui ne soit pas le sommet d'une corde. On initialise $i = 1$ (i désigne un compteur). Le point Q choisi est un *sommet artificiel*.

2. On se déplace dans le sens horaire le long du cercle jusqu'à trouver le sommet P d'une corde.

3. On attribue à P la valeur i_a, et à l'autre sommet de la corde associée à P la valeur i_b. On incrémente i.

4. On se déplace dans le sens horaire le long du cercle à partir du sommet précédent. Si l'on rencontre un sommet non étiqueté, on le note P et on va à l'**étape 3**. Si l'on rencontre un sommet déjà étiqueté (avec une étiquette de la forme j_b nécessairement) : on attribue à Q l'étiquette i_b, et on incrémente i.

5. On se déplace dans le sens horaire le long du cercle à partir du sommet précédent (qui était déjà étiqueté). Si l'on rencontre un sommet déjà étiqueté, on continue. Si l'on rencontre un sommet artificiel, l'algorithme s'arrête. Si l'on rencontre un sommet pas encore étiqueté P, on place un sommet artificiel Q juste avant ce sommet, et on retourne à l'**étape 3**.

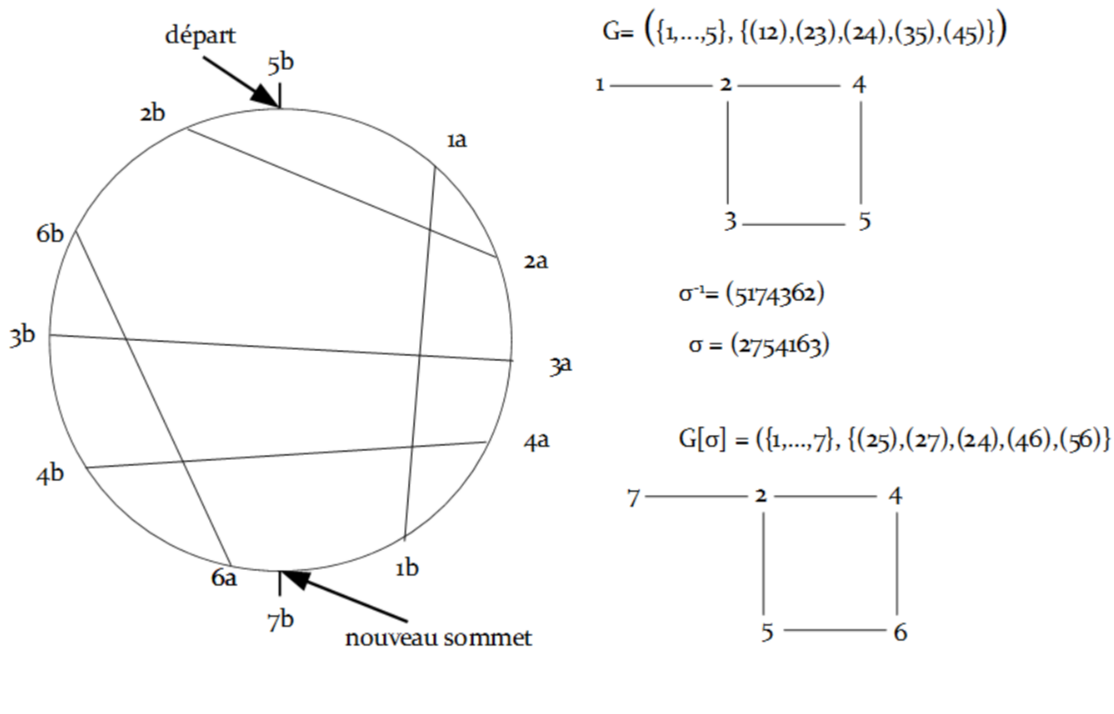

Figure 13: Construction de σ dont le graphe est isomorphe à $G = ([\![1; 5]\!], \{(12), (23), (24), (45), (35)\})$.

Montrons que la permutation π dont le graphe $\tilde{G}(\pi)$ est G (à un ensemble de sommets isolés près) est la permutation obtenue en lisant les sommets dont l'étiquette est d'indice $_b$ en parcourant le cercle dans le sens horaire en commençant au point de départ.

- Soit $i < j$ les étiquettes de deux cordes qui s'intersectent sur le graphe. Dans le sens horaire, les sommets apparaissent dans l'ordre i_a, j_a, i_b, j_b. Soit k la valeur du dernier sommet artificiel qui apparait avant le sommet d'étiquette j_a. L'algorithme implique que $j < k$. Ainsi, $i < j < k$ et $k \prec i \prec j$. Par conséquent, (ij) est une arête de $\tilde{G}(\pi)$.

- Réciproquement, soit (ij) avec $i < j$ une arête du graphe de $\tilde{G}(\pi)$. On dispose de k tel que $i < j < k$ et $k \prec i \prec j$. Par l'absurde, si i_b apparait avant j_a : soit k n'est pas un sommet artificiel et $k < i$, contradiction, soit k est un sommet artificiel, dont la valeur a été fixée avant de rencontrer le sommet d'étiquette j_a, donc $k < j$, contradiction. Donc les cordes i et j s'intersectent.

($\Leftarrow$) Réciproquement, soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On cherche une représentation circulaire de $\tilde{G}(\sigma)$, ce qui est équivalent à avoir une représentation circulaire de $G[\sigma^{-1}]$.
Soit $u_0 \prec u_1 \prec ... \prec u_k$ la suite des sommets isolés dans l'ordre dans lequel ils apparaissent dans σ. Par récurrence, soit $(v_i = u_{\phi(i)})_{i \leq m}$ suite croissante extraite telle que $v_0 = u_0 (= \sigma(1))$, et $\phi(i+1) = min\{j > \phi(i)$ tel que $u_j > u_{\phi(i)}\}$.
On peut très bien avoir $v_0 = n$ et $m = 0$.
Par construction, $\forall i \leq k, \exists v_j \preceq u_i, v_j \geq u_i$. Ainsi, pour toute arête (ij) du graphe, avec $i < j$, il existe $v_\nu > j$ tel que $v_\nu \prec i$.
On a toujours $v_m = n$.

Considérons l'algorithme suivant : (voir figure 14 pour sa mise œuvre)

1. Soit $\mathcal{C}$ un cercle. On place les sommets $\sigma(1)_b, ..., \sigma(n)_b$ dans le sens horaire sur le cercle.
2. $k = \sigma(1)$ est un sommet isolé de $\tilde{G}(\sigma)$. On initialise $i = 1$.
3. Si $i = v_\nu$: $k = v_{\nu+1}$, puis on va à l'**étape 5**.
4. On place i_a dans l'arc de cercle entre k_b et h_b où h désigne l'entier qui apparait après k dans σ. On place de plus i_a après les sommets de cet arc de cercle qui portent déjà une étiquette de la forme m_a.
5. Si $i < n$, on incrémente i puis on va à l'**étape 3**. Si $i = n$, l'algorithme s'arrête.

Cet algorithme fournit une représentation circulaire de $\tilde{G}(\sigma)$ où seuls les sommets isolés ne sont pas représentés. En effet,

- Soit (ef) une arête de $\tilde{G}(\sigma)$, avec $e < f$. Soit $g = v_\nu$ un sommet isolé de la suite (v_i) vérifiant $g \prec e$ et $g > f$. On sait que e_b est avant f_b (configuration initiale), et de même i prend d'abord la valeur e puis f donc e_a est placé avant f_a. De plus, quand $i = e$ et $i = f$, on a $k \leq g$, car la suite des valeurs prises par k est croissante. Ainsi, e_a et f_a sont placés avant e_b. Donc ces sommets apparaissent dans l'ordre e_a, f_a, e_b, f_b, les cordes e et f se croisent.

- Réciproquement, soit e et f deux cordes qui s'intersectent. Les sommets apparaissent nécessairement dans l'ordre e_a, f_a, e_b, f_b. Ainsi, f_a est placé sur un arc de cercle entre g_b et h_b, pour un certain $g = v_\nu$. On a donc clairement $v_\nu \prec i$ (car g_b placé avant e_b), et $f < v_\nu$ car dans l'algorithme, on a toujours $k > i$. Donc (ef) est une arête du graphe.

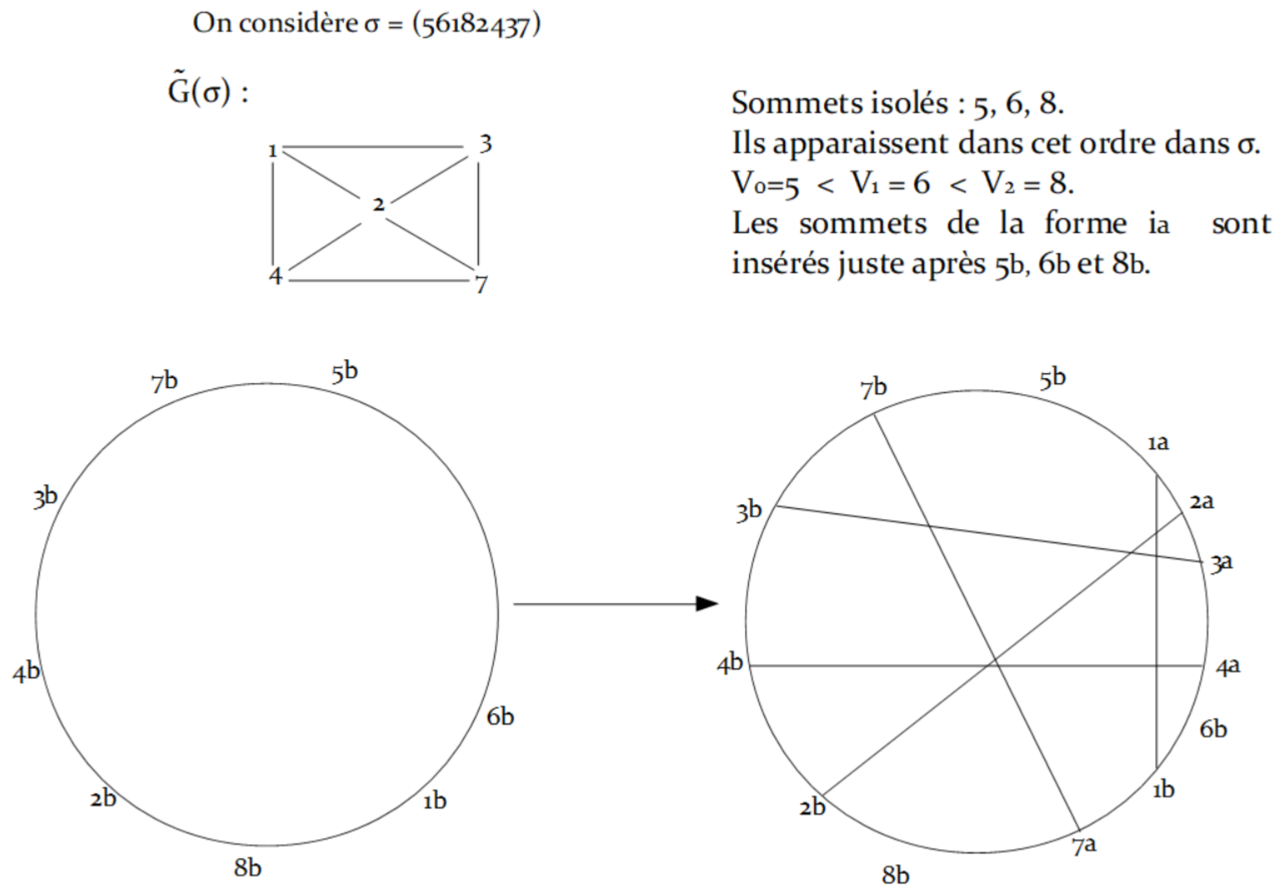

Figure 14: Construction du graphe circulaire associé au graphe de $\sigma = 56182437$, dont le graphe est $\tilde{G}(\sigma) = ([\![1;8]\!], \{(12),(23),(24),(27),(13),(14),(37),(47)\})$

8.2 Dénombrement des boucles

Propriété. Soit $(x,y) \in \mathbb{N}^2$, $n \geq 1$. On a

$$w_n(x,y) = \binom{n}{r}\binom{n+2}{s} - \binom{n+2}{r+1}\binom{n}{s-1}$$

Preuve. Par récurrence, supposons la formule vraie pour $n \geq 1$.
Soit $(x,y) \in \mathbb{N}^2$, tels que $x+y \equiv 0[2]$.
On a $r = \frac{1}{2}(n+1+x-y)$ et $s = \frac{1}{2}(n+1-x-y)$.

$$w_{n+1}(x,y) = w_n(x-1,y) + w_n(x+1,y) + w_n(x,y-1) + w_n(x,y+1)$$

$$= \binom{n}{r-1}\binom{n+2}{s} - \binom{n+2}{r}\binom{n}{s-1} + \binom{n}{r}\binom{n+2}{s-1} - \binom{n+2}{r+1}\binom{n}{s-2}$$

$$+ \binom{n}{r}\binom{n+2}{s} - \binom{n+2}{r+1}\binom{n}{s-1} + \binom{n}{r-1}\binom{n+2}{s-1} - \binom{n+2}{r}\binom{n}{s-2}$$

On remarque la factorisation suivante :

$$= \left(\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}\right)\left(\binom{n+2}{s-1} + \binom{n+2}{s}\right) - \left(\binom{n+2}{r} + \binom{n+2}{r+1}\right)\left(\binom{n}{s-2} + \binom{n}{s-1}\right)$$

Qui se simplifie avec la formule de Pascal :

$$\binom{n+1}{r}\binom{n+3}{s} - \binom{n+3}{r+1}\binom{n+1}{s-1}$$

Ce qui est la formule attendue pour $n+1$.

Propriété. Pour $n \geq 1$, $w_{2n}(0,0) = C_n C_{n+1}$.

Preuve. Soit $n \geq 1$. D'après la formule prouvée ci-dessus,

$$w_{2n}(0,0) = \binom{2n}{n}\binom{2n+2}{n} - \binom{2n+2}{n+1}\binom{2n}{n-1}$$

Or,

$$C_n C_{n+1} = \left(\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}\right)\left(\binom{2n+2}{n+1} - \binom{2n+2}{n+2}\right)$$

$$= \left(\binom{2n}{n}\binom{2n+2}{n+1} + \binom{2n}{n+1}\binom{2n+2}{n+2}\right) - \left(\binom{2n}{n}\binom{2n+2}{n+2} + \binom{2n}{n+1}\binom{2n+2}{n+1}\right)$$

Donc il s'agit de prouver que :

$$\binom{2n}{n}\left(\binom{2n+2}{n+1} - \binom{2n+2}{n+2}\right) = \binom{2n+2}{n+2}\left(\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}\right)$$

On reconnait l'expression de C_n et de C_{n+1}, il faut prouver que :

$$C_n \binom{2n}{n} = C_{n+1}\binom{2n+2}{n+2}$$

Remarquons que :

$$\binom{2n+2}{n+2} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+2)}\binom{2n}{n} = \frac{2(2n+1)}{n+2}\binom{2n}{n}$$

Or, les nombres de Catalan vérifient la relation :

$$C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n$$

Par conséquent,

$$C_n \binom{2n}{n} = C_{n+1}\binom{2n+2}{n+2}$$

Soit

$$\boxed{w_{2n}(0,0) = C_n C_{n+1}}$$