3707 CHAN Gabriel

Propriétés des permutations réalisables et triables par une pile.

La lecture du chapitre "Patterns and permutations" provenant du livre "A singular mathematical promenade" d'Etienne Ghys, m'a poussé à m'intéresser plus particulièrement aux "stack-sortable" permutations.
L'opération de tri par une pile, peut être décrite comme un certain déplacement de wagons sur un réseau ferroviaire simple, cela permettant d'anticiper les permutations faisables sur l'ordre de ces wagons.

Positionnement thématique (phase 2)

MATHEMATIQUES (Algèbre), INFORMATIQUE (Informatique Théorique).

Mots-clés (phase 2)

Mots-Clés (en français)	**Mots-Clés** (en anglais)
Permutations Réalisables avec une pile	*Stack-realisable permutations*
Permutations Triables avec une pile	*Stack-sortable permutations*
Evitement de Motifs	*patterns Avoidance*
Trains	*Trains*
Sous-suites de permutations	*Permutations subsequences*

Bibliographie commentée

Etienne Ghys dans *A singular mathematical promenade* [1] nous introduit à une façon très naturelle de générer des permutations: ce sont les permutations réalisables en partant de l'identité avec un algorithme limité à une seule structure de données de pile. Ce problème de tri d'une séquence d'entrée utilisant une pile a été d'abord posé par Knuth (1968) [4]. A la question de dénombrement s'ajoute alors celle d'une condition nécessaire et suffisante pour obtenir une telle permutation. Ces permutations sont en fait rapidement liées aux nombres de Catalan et sont entièrement caractérisées par l'évitement d'un motif particulier à 3 éléments. Cette brève introduction combinatoire soulève beaucoup de questions et permet d'envisager des généralisations. Quelles sont les permutations qui, réciproquement, permettent d'obtenir l'identité avec cette structure de données de pile ? Quelles sont les particularités de ces permutations ? Que se passe-t-il si l'on rajoute plusieurs piles en série ?

Les 2 thèses suivantes [2]et [3] proposent toutes les deux différentes approches des permutations obtenues avec des opérations sur les piles et en précisent leur étude. Le travail de D Rotem (1982) [2] nous offre un catalogue très complet de propriétés de ces permutations. Il distinguera les permutations que l'on peut obtenir en partant de l'identité dont l'ensemble est noté SRn, des permutations qui permettent d'obtenir l'identité (SSn). Les résultats présentés portent particulièrement sur les caractéristiques de sous-suites de ces permutations que l'on peut trouver dans ces deux ensembles toujours mis en relief avec les résultats dont on dispose sur celles des permutations en général. La thèse tend à montrer que globalement ces permutations sont plus « ordonnées » que les permutations aléatoires. Enfin la dernière thèse [3], envisage une recherche orientée vers l'informatique en élaborant un algorithme en O(n) déterminant si une permutation est stack-sortable ou non et retrouve divers résultats de la thèse de D.Rotem[2] sans employer les arbres.

Adeline Pierrot, Dominique Rossin développent en 2013 [5] des résultats sur les permutations réalisables avec 2 piles en séries, plus précisément les 2_stack pushall sortable permutations. Ils exhibent un lien avec les colorations qui permet d'obtenir un algorithme déterminant les permutations triables avec cette fois-ci deux piles en O(n^2). Toutefois, les caractérisations de ces permutations sont bien plus complexes et encore moins connues.

L'étude des permutations réalisables et triables par une pile se révèle, en fait, être un cas particulier de l'étude générale des évitements de motifs dans les permutations ; Samantha Dahlberg (2017) [7] et Elizabeth Wulcan [6] proposent des travaux beaucoup plus ambitieux, ceux-là traitent justement de l'évitement des motifs dans le groupe symétrique Sigma3 qui correspond à l'étude de SSn et SRn et qui permettra de déterminer l'intersection de SSn et SRn d'un troisième point de vue.

Problématique retenue

Notre étude se focalisera sur l'étude des permutations générées et réalisables avec une seule pile. Nous répondrons à la question : quelles sont donc les propriétés des permutations réalisables et/ou triables avec une unique pile ?

Objectifs du TIPE

Il s'agira dans un premier temps d'entièrement caractériser ces permutations par les motifs qu'elles évitent afin de proposer quelques algorithmes indiquant pour une permutation donnée si elle est triable ou réalisable avec une pile.

Puis d'étudier leurs répartitions en déterminant le nombre de ces permutations, et de caractériser les permutations qui sont simultanément réalisables et triables par une pile.

Enfin, d'étudier les sous-suites distinguées, l'espérance de la taille de la plus longue sous-suite strictement croissante et décroissante de ces permutations afin de montrer qu'elles sont plus ordonnées que les permutations aléatoires.

Références bibliographiques (phase 2)

[1] Etienne Ghys : A singular mathematical promenade : *Patterns and permutations Donald Knuth, ENS Editions 2017 ISBN 978-2-84788-940-6*

[2] D. Rotem : Stack Sortable Permutations : *1981, 12 p.*

[3] Yue-Li Wang, Justie Su-tzu Juan and Dyi- Rong Duh : On the Stack Sortable and Pushpopable Permutations : *5 p.*

[4] Donald Knuth : The Art of Computer Programming : *Volume 1, Chapitre 2. Information*

Structures, 1997 Addison Wesley Longman, ISBN 0-201-89683-4

[5] ELIZABETH WULCAN : Pattern Avoidance in involutions : *33 p.*

[6] SAMANTHA DAHLBERG : Permutation statistics and pattern avoidance in involutions : *2017, 53 p.*