

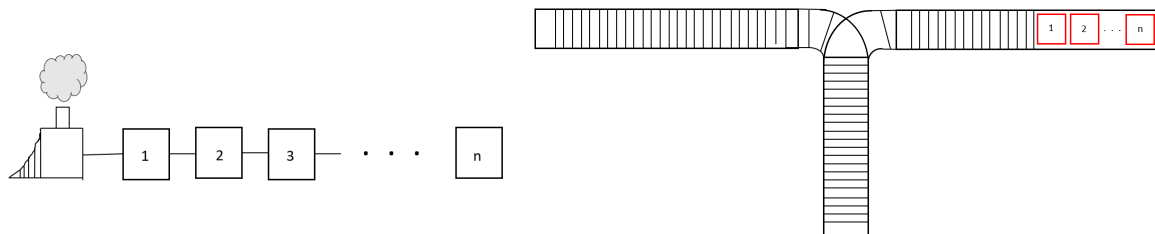
TIPE: Propriétés des permutations réalisables et triables par une pile.

Gabriel CHAN

2018-2019

1 Introduction

On s'intéresse ici aux façons de réordonner des wagons avec une structure de pile.

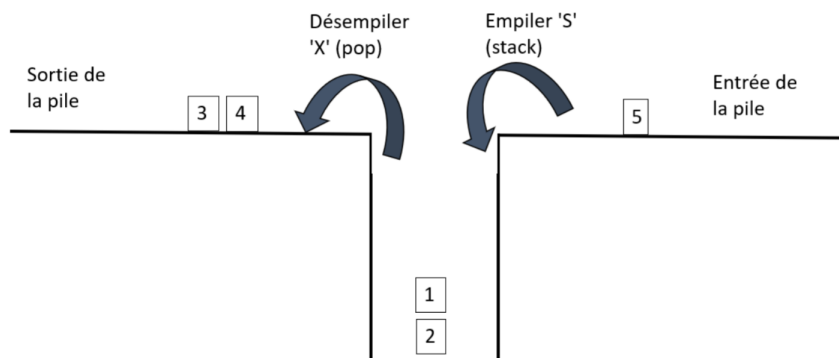


Notation 1. Si $\pi \in S_n$, on la notera :

$$\pi = \pi(1)\pi(2)\dots\pi(n)$$

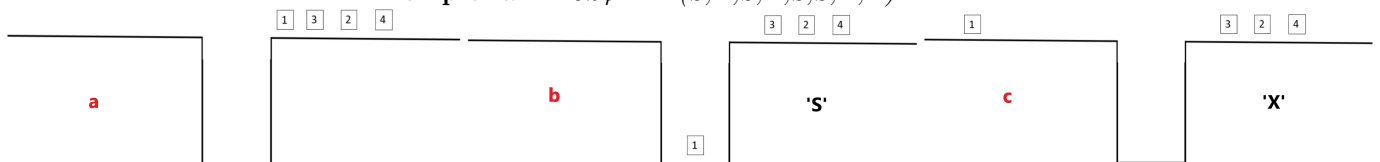
Définition 1.1. Une pile est une structure de données par laquelle on peut passer des éléments de l'entrée de la pile à sa sortie. On dispose des opérations :

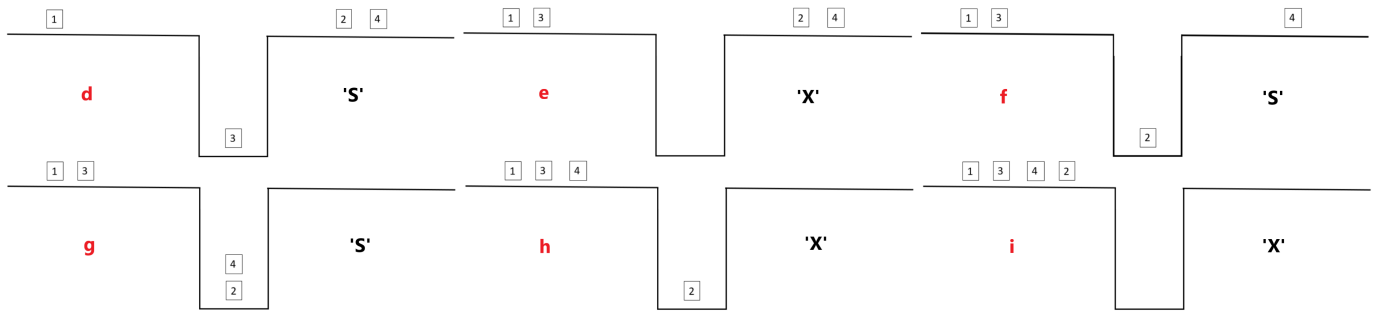
- 'S' : mettre l'élément suivant au sommet de la pile.
- 'X' : transférer l'élément au sommet de la pile au bout de la sortie.



Définition 1.2. Soit $\pi \in S_n$, une séquence L d'opérations X et S est valide si tous les éléments de π sont transférés à la sortie et si 'X' n'est jamais spécifié quand la pile est vide.

Exemple. $\pi = 1324$ $L = (S, X, S, X, S, S, X, X)$





$$L(\pi) = 1342$$

2 SS_n et SR_n caractérisation par l'évitement d'un motif

Définition 2. Soit $\pi \in S_n$,

On dit que π est *stack-sortable* s'il existe une suite d'opérations L telle que $L(\pi) = 12\dots n$.

On note l'ensemble de ces permutations SS_n .

On dit que π est *stack-réalisable* s'il existe une suite d'opérations R telle que $L(12\dots n) = \pi$.

On note l'ensemble de ces permutations SR_n .

Proposition 2. $\pi \in SS_n \Leftrightarrow \pi^{-1} \in SR_n$

Théorème 2. Soit $\pi = p_1 p_2 \dots p_n \in S_n$,

$\pi \in SR_n$ si et seulement si $\sigma = 312 \not\prec \pi$

C'est-à-dire :

$\nexists p_i, p_j, p_k$ avec $i < j < k$ tels que $p_k < p_i < p_j$

Exemple 2.1. $\pi = 21534$ n'appartient pas à SR_5

Démonstration 2. Si on prend $\pi = p_1 p_2 \dots p_n \in S_n$ et que l'on veut voir si elle est réalisable, il n'y a qu'une seule manière de faire. On pousse tous les éléments de $12\dots n$ jusqu'à ce que p_1 soit au sommet de la pile et on place p_1 sur la sortie puis on recommence jusqu'à ce que p_2 soit sur le sommet de la pile.

Ainsi, s'il y a un problème, c'est si et seulement si nous disposons de $1 < i < j < n$ et que nous souhaitons placer i dans la sortie mais que l'on ne peut pas car il existe $j > i$ tel que j est au dessus de i sur la pile.



Et si ce j est placé là c'est qu'il existe $k > j$ tel que $p_k < p_j$:

Par conséquent on ne peut pas avoir $p_k < p_i < p_j$ avec $i < j < k$.

Corollaire 2.1. Soit $\pi = p_1 p_2 \dots p_n \in S_n$,

$\pi \in SS_n$ si et seulement si $\sigma^{-1} = 231 \not\prec \pi$

Exemple 2.2. $\pi = 21453$ n'appartient pas à SS_5

Remarque 2. On en déduit l'algorithme suivant qui détermine si une permutation est dans SS_n ou SR_n en $O(n^3)$:

- On représente une permutation par une liste de n éléments.

- On la parcourt 3 fois pour vérifier si elle contient le motif associé.

On peut évidemment construire directement la permutation à l'aide d'une pile, qui permet de vérifier cette fois-ci en $O(n)$ la condition, pour SR_n par exemple :

- on part de l'identité $Id=[n, n-1, \dots, 1]$, on représente la pile par une liste et on utilise les opérations $append(S)$ et $pop(X)$.

- On veut obtenir $\sigma = [\sigma(n), \sigma(n-1), \dots, \sigma(1)]$

- Pour avoir σ_i on pousse tous les éléments de l'identité jusqu'à ce que la liste Id soit vide ou bien que σ_i soit au sommet de la pile auquel cas on enlève le dernier élément de la pile.

- On vérifie que la liste obtenue est bien la même que σ , on conclut si σ est dans SR_n .

3 Cardinaux et propriétés de SS_n et SR_n

Propriété 3.1 . Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|SS_n| = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{n\sqrt{n\pi}}$$

Remarque 3.1. On peut évidemment voir ces permutations comme des mots de Dick sur l'alphabet (S, X) , en effet il doit y avoir autant de S que de X et aucune séquence tronquée à droite ne doit avoir plus de X qu'il n'y a de S .

Je propose également ici une démonstration qui permet de mieux comprendre la structure de ces permutations.

Nous verrons par la suite qu'il existe une bijection entre ces permutations et les arbres binaires à n branches.

Démonstration 3.1 . Soit $f(n) = |SS_n|$,

Soit $\pi = p_1 p_2 \dots p_n \in S_n$, si n est à la k -ième position, écrivons : $\pi = \pi_g n \pi_d$ où

$$\pi_g : \llbracket 1, k-1 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, k-1 \rrbracket \in SS_{k-1}$$

$$\pi_d : \llbracket k+1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket k+1, n \rrbracket \in SS_{n-k}$$

D'où, en sommant toutes les possibilités d'emplacement de n , on obtient : $f(n) = \sum_{k=1}^n f(k-1)f(n-k)$

Remarque 3.1.

$$\left| \frac{SS_n}{S_n} \right| \sim \left(\frac{4e}{n} \right)^n \frac{1}{n^2 \pi \sqrt{2}}$$

Il y a donc très peu de permutation stack-sortable ou stack-réalisable. Qu'en est-il maintenant de $SS_n \cap SR_n$ (permutations simultanément triables et réalisables) ?

Définition 3.1 . Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n l'ensemble des involutions de S_n (éléments d'ordre 2 pour la composition dans S_n).

Remarque 3.2. $SS_n \cap I_n \subset SS_n \cap SR_n$

$SR_n \cap I_n \subset SS_n \cap SR_n$

Démonstration et remarque. Ce fait résulte de la propriété 1.3, $\pi \in SS_n \Leftrightarrow \pi^{-1} \in SR_n$

On a en fait mieux : il y a égalité dans les 2 cas. Ce qui va montrer qu'il y a relativement très peu de permutations à la fois réalisables et que l'on peut trier.

Définition 3.2. Soit $\sigma \in S_n$, on appelle séparation propre de σ une suite telle que

$$\sigma = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_k$$

où \circ désigne la concaténation. (Les σ_i sont des sous-mots pas des sous-permutations ! \circ ne désigne pas la composition !)

Si $\sigma_i = a_{i_1} \dots a_{i_j}$, σ_i est dite décroissante, si :

$$a_{i_1} > a_{i_2} > \dots a_{i_j}$$

Une séparation propre est ascendante si : $\forall i, \sigma_i$ est décroissante et :

$\forall (i, k), i < k \left. \begin{array}{l} \sigma_i = a_{i_1} \dots a_{i_m} \\ \sigma_k = b_{i_1} \dots b_{i_p} \end{array} \right\} \forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \forall l \in \llbracket 1, p \rrbracket, a_{i_j} < b_{i_l}$ Une séparation propre ascendante, si elle existe est unique.

Exemple 3.1. On peut évidemment, pour toute permutation, lui associer une séparation propre avec des sous-mots décroissants de tailles maximales en s'arrêtant au dernier endroit où l'on perd la propriété de décroissance.

$\pi = 132654$	$\pi = 215439876$
$\pi = 13 \circ 2 \circ 6 \circ 54$	$\pi = 21 \circ 543 \circ 9876$
non ascendante	ascendante

Proposition 3.2. Une permutation qui a une séparation ascendante est une involution.

Proposition 3.3. $\sigma \in SS_n \cap SR_n$, si et seulement si σ a une séparation ascendante.

Corollaire 3.

$$SS_n \cap SR_n = SR_n \cap I_n = SS_n \cap I_n$$

Proposition 3.4.

$$|SS_n \cap SR_n| = 2^{n-1}$$

Démonstration 3.4. $\forall \sigma \in SS_n \cap SR_n, \sigma = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_k$, décomposition ascendante.

σ est uniquement déterminée par les tailles de $\sigma_1, \dots, \sigma_k, l_1, \dots, l_k$, avec $\sum_{i=1}^k l_i = n$.

$$\left\{ \begin{array}{l} SS_n \cap SR_n \rightarrow S \\ \sigma = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_k \rightarrow (l_1, \dots, l_k) \end{array} \right.$$

4 Suite des records

Définition 4.1. Soit $\pi = p_1 p_2 \dots p_n \in S_n$, un élément p_i est un record si il n'existe pas d'éléments $a_j, i < j$ tel que $a_i > a_j$.

Exemple 4.1. Soit $\pi = 132546$, la suite des records de π est la sous-suite 1356.

Théorème 4.1. Si l'on munit S_n de la probabilité uniforme, l'espérance de la taille de la suite des records d'une permutation aléatoire de SR_n est de :

$$3 - \frac{6}{n+2}$$

Idée de la preuve 4.1. Si $\pi = p_1 p_2 \dots p_n \in SR_n$ et $\sigma = p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}$ sa sous-suite distinguée, -On montre que les $k+1$ permutations formées à partir de σ en ajoutant $n+1$ immédiatement à gauche d'un p_{i_j} est dans SS_{n+1} (ou en ajoutant $n+1$ tout à la fin) .

-Réciproquement on montre que insérer $n+1$ à un autre endroit crée une permutation π' telle que $\pi' \notin SR_{n+1}$.

- On établit ainsi une bijection entre ces permutations et SS_{n+1} .

On a alors : $|SR_{n+1}| = C_{n+1} = \sum_{\pi \in SS_n} (a_\pi + 1)$ où a_π désigne la taille de σ .

$$\text{Donc : } \frac{\sum_{\pi \in SS_n} (a_\pi + 1)}{C_n} = 3 - \frac{6}{n+2}$$

Théorème 4.2. Pour une permutation tirée aléatoirement dans S_n , l'espérance de la taille de la suite des records est H_n , la somme partielle de la série harmonique.

Exemple 4.2. Si $\pi = 1324$, alors $\sigma = 134$

Donc si l'on note σ_k les permutations formées :

$$\sigma_1 = 51324, \sigma_2 = 15324, \sigma_3 = 13254, \sigma_4 = 13245$$

5 Plus longue suite descendante et ascendante dans une permutation de SS_n ou SR_n et bijection de SS_n et les arbres binaires

Définition 5.1. Soit $\pi = p_1 p_2 \dots p_n \in S_n$, une sous-suite de longueur k de π est dite décroissante si : $\exists (i_1, \dots, i_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k$, $\begin{cases} i_1 < \dots < i_k \\ p_{i_k} < \dots < p_{i_1} \end{cases}$

Une sous-suite décroissante est maximale si on ne peut pas ajouter d'élément de π sans perdre la propriété de décroissance. On définit de même pour une sous-suite croissante.

Notation 5.1. On note $LDS(\pi)$ l'ensemble des sous-suites décroissantes maximales de taille maximale de π . De même pour $LAS(\pi)$.

Exemple 5.1.

$$\pi = 364521$$

-321 est une sous-suite maximale décroissante.

-6421 \in $LDS(\pi)$, 345 \in $LAS(\pi)$.

Théorème 5.1. La longueur d'une permutation de $LDS(\pi)$ si $\pi \in SS_n$ est égale à la profondeur nécessaire dans la pile.

Théorème d'Erdős-Szekeres. Soient r et $s \in \mathbb{N}^*$, on note $n = (r-1)(s-1)+1$, alors pour toute suite de n points contient une sous-suite croissante de longueur au moins r ou une sous-suite décroissante de longueur au moins s .

Théorème (admis) 5.2. L'espérance de la taille d'une LDS dans une permutation tirée au hasard dans SS_n est asymptotiquement :

$$\sqrt{\pi n} - 1.5 + \frac{11}{24} \sqrt{\frac{\pi}{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

On veut associer à une permutation de SS_n un arbre. On verra ainsi mieux le rapport aux nombres de Catalan, et cela nous permettra d'étudier l'espérance de la taille d'une LAS.

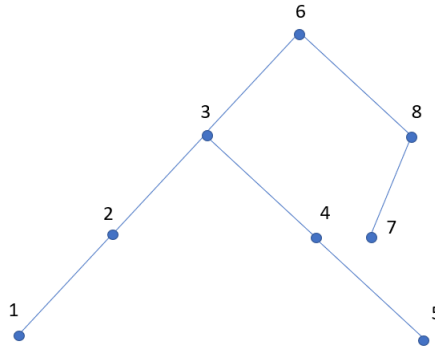
Construction. On note $R_T(j)$ (et $L_T(j)$) le sous arbre de racine j à gauche (respectivement à droite).

Soit $\pi = p_1 \dots p_n$ et T un arbre vide

On prend p_1 comme racine de l'arbre, puis :

$\forall k > 1$, si p_k est inséré dans un sous-arbre de racine p_i on l'insère dans $L_T(p_i)$ si $p_k \lll p_i$ sinon dans $R_T(p_i)$ jusqu'à ce que l'on atteigne un sous arbre vide et on définit une nouvelle racine appelée p_k .

Exemple 5.3. $\pi = 63214587$



Théorème 5.3. Grâce à cette bijection et à un dénombrement judicieux détaillé en annexe on montre que l'espérance de la longueur d'une LAS d'une permutation de SS_n est de $\frac{1}{2}(n+1)$.

6 Evitement de motifs

Du point de vue de l'évitement des motifs, il est légitime de se demander si, étant donné une permutation de S_3 , le nombre de permutations de S_n évitant ce motif est toujours le même.

Théorème 6. $\forall \sigma \in S_3$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |Av_n(\sigma)| = C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

7 Conclusion

	S_n	SS_n
Cardinal	$n!$	$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$
Nombre d'involutions	$\sum_{k=0}^{E(n/2)} \frac{n!}{k!(n-2k)!2^k}$	2^{n-1}
Taille moyenne des records	$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$	$3 - \frac{6}{n+2}$
Taille moyenne d'une LAS	$\sim 2\sqrt{n}$	$\frac{n+1}{2}$
Taille moyenne d'une LDS	$\sim 2\sqrt{n}$	$\sim \sqrt{\pi n}$

Les permutations de SS_n apparaissent plus ordonnées que celles du groupe symétriques en général, dans le sens où elles ont des LAS sensiblement plus longues (asymptotiquement), des LDS plus courtes et une taille moyenne de leur suite des records qui converge vers 3 (au lieu de diverger pour S_n). Par ailleurs, il apparait notablement que l'évitement d'un motif de taille 3 est intrinsèquement lié aux nombres de Catalan.

8 Bibliographie

- [1] Etienne Ghys : **A singular mathematical promenade** : Patterns and permutations Donald Knuth, ENS Editions 2017 ISBN 978-2-84788-940-6
- [2] D. Rotem : **Stack Sortable Permutations** : 1981, 12 p.
- [3] Yue-Li Wang, Justie Su-tzu Juan and Dyi- Rong Duh : **On the Stack Sortable and Pushpopable Permutations** : 5 p.
- [4] Donald Knuth : **The Art of Computer Programming** : Volume 1, Chapitre 2. Information 2 Structures, 1997 Addison Wesley Longman, ISBN 0-201-89683-4
- [5] Elizabeth Wulcan : **Pattern Avoidance in involutions** : 33 p. [6] Samantha Dahlberg : Permutation statistics and pattern avoidance in involutions : 2017, 53 p

9 Annexe

9.1 Parties 3 et 4

Démonstration 3.2. Il suffit de montrer que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, la permutation $\rho = n \ n-1 \dots 1$ est une involution.

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_k, \\ \text{où } \sigma_i &\text{ est de longueur } l_i \text{ et est de la forme :} \\ \left. \begin{array}{l} \sigma_i = j \ j-1 \ \dots \ j-l_i+1 \\ \sigma_i = \sigma(j-l_i+1) \dots \sigma(j) \end{array} \right\} \sigma^2 = Id \end{aligned}$$

Démonstration 3.3. En effet, par définition σ ne contient pas les motifs 231 et 312. Ecrivons :

$\sigma = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_k$ où les σ_i sont décroissantes.

Soit $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, supposons par l'absurde qu'il existe $p_a \in \sigma_i$ et $p_b \in \sigma_{i+1}$ tels que $p_a > p_b$, on suppose, sans pertes de généralités que $a < b$,

Alors par définition on a les possibilités :

$$\left. \begin{array}{l} \exists c \in \sigma_i \ p_a > p_b > p_c, \quad p_a > p_b > p_c \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad a < c < b \end{array} \right\} \Rightarrow (231) \prec \sigma$$

$$\left. \begin{array}{l} \exists c \in \sigma_{i+1} \ p_c > p_a > p_b, \quad p_c > p_a > p_b \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad a < c < b \end{array} \right\} \Rightarrow (312) \prec \sigma$$

Ce qui est impossible dans les 2 cas, d'où le résultat.

Détail preuve 3.4. Si l'on note $S = \bigsqcup_{k=1}^n S_k$ où S_k désigne l'ensemble des k -uplets de \mathbb{N}^* , $\sum_{i=1}^k l_i = n$, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\left\{ \begin{array}{l} S_k \rightarrow \llbracket 1, n-1 \rrbracket^{k-1} \\ (l_1, \dots, l_k) \rightarrow (l_1, l_1+l_2, \dots, l_1+\dots+l_{k-1}) \end{array} \right.$$

est clairement une bijection.

Ainsi :

$$\begin{aligned} |SSn \cap SRn| &= \sum_{k=1}^n |S_k| \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \\ &= 2^{n-1} \end{aligned}$$

Démonstration 4.1 1. Montrons que :

$\forall i \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$, $\sigma_i \in SR_{n+1}$ Par l'absurde s'il existe $2 \leq i \leq k$, $\sigma_i \notin SR_{n+1}$ (les cas $i=1$ et k sont évidents).

Alors il existe p_i et p_j tels que :

$\left\{ \begin{array}{l} i < j \\ p_j < p_i \end{array} \right.$ Considérons alors p_{i_l} l'élément de σ immédiatement à droite de $n+1$. Alors p_i, p_{i_l}, p_j est une séquence

interdite : $\left\{ \begin{array}{l} i < j < i_l \\ p_j < p_i < p_{i_l} \end{array} \right. \Rightarrow \pi \notin SS_n$

Réciproquement montrons que mettre $n+1$ à un autre endroit crée π' telle que $\pi' \notin SR_{n+1}$.

Soit p_{i_l} l'élément de σ immédiatement à gauche de $n+1$.

Alors on peut écrire $\pi' = * p_{i_l} * n+1 p_k *$.

Alors l'élément immédiatement à droite de $n+1$ n'est pas plus grand que p_{i_l} par hypothèse (σ sous-suite disinguée).

D'où π' contient $(p_{i_l}, n+1, p_k)$ avec $p_k < p_{i_l} < n+1$, ce qui n'est pas.

Soit $\pi' \in SR_{n+1}$.

Alors la permutation obtenue par restriction en enlevant $n+1$ est clairement dans SR_n .
Donc la construction précédente fonctionne. D'où la bijection.

Démonstration 4.2. *Considérons :*

$$f : \begin{cases} S_n \rightarrow [2] \times [3] \dots \times [n] \\ \pi \rightarrow (N_2(\pi), \dots, N_n(\pi)) \end{cases}$$

où $[i] = \llbracket 1, i-1 \rrbracket$ et $N_i(\pi) = |\{j < i, \pi(j) < \pi(i)\}|$

f est clairement une bijection, donc si on munit S_n de la probabilité uniforme, on montre que les variables aléatoires $R_i = \mathbf{1}_{iestunrecord} = \mathbf{1}_{N_i(\pi)=i-1}$ sont mutuellement indépendantes et que $\mathbb{E}(R_i) = \frac{1}{i}$. Donc :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n R_i\right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

Démonstration du théorème d'Erdős-Szekeres. Soit u une suite de n points, on la note (n_i) . On associe pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ le couple (a_i, b_i) où a_i désigne la longueur de la plus longue sous-suite croissante qui se termine par n_i et b_i celle de la plus longue sous-suite décroissante qui se termine par n_i . Cela définit une application injective, en effet si $i < j$:

si $n_i < n_j$ alors $a_i < a_j$

si $n_i > n_j$ alors $b_i < b_j$

Il existe $n-1 = (r-1)(s-1)$ couples tels que $a_i < r$ et $b_i < s$, donc d'après le principe des tiroirs on a le résultat.

9.2 Théorème 5.3

Définition. Une partition ordonnée de n en m parties est un m -uplet c tel que :

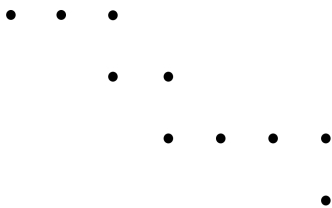
$$c = (c_1, \dots, c_m), c_i \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^m c_i = n$$

Définition. Une composition c de n peut être représentée comme un graphe en zig-zag. Ce graphe contient m lignes avec c_i points sur la i -ème ligne.

Pour $i > 1$, le premier point de la i -ème ligne est écrit sous le dernier point de la $(i-1)$ -ème ligne.

Notation. On note : $\bar{c} = (\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_{n+1-m})$ où \bar{c}_i désigne le nombre de points sur la i -ème colonne.

Exemple. On prend la partition ordonnée de 10 : $c = (3, 2, 4, 1)$



Alors $\bar{c} = (1, 1, 2, 2, 1, 1, 2)$

Définition. Soit $\pi \in SS_n$. Soit \tilde{L} la séquence de S et de X opérations qui trie π dans une pile.

Scannant \tilde{L} de gauche à droite, on appelle suite de "S" consécutifs un S -groupe et une suite de "X" consécutifs un X -groupe.

On appelle :

- S -specification $S = (s_1, \dots, s_l)$, où s_i est la taille du i -ème S -groupe.

- X -specification $X = (x_1, \dots, x_l)$, où x_i est la taille du i -ème X -groupe.

Remarque. Le nombre de X -groupe et de S -groupe est le même.

Ces groupes sont alternés dans \tilde{L}

Ces résultats résultent de la nature même d'une pile.

Exemple. $\pi = 63214587$

On vérifie que $L = (S, S, S, S, X, X, X, S, X, S, X, X, S, S, X, X)$.

D'où $X = (3, 1, 2, 2)$ et $S = (4, 1, 1, 2)$

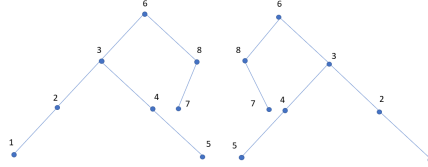
Notation. Si $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

on note $R_{n,\pi}(j)$ l'ensemble des entiers qui apparaissent à droite de j dans l'écriture de π dans le sens de lecture.

On définit de même $L_{n,\pi}(j)$

Définition. La table d'inversion de π est le n -uplet (b_1, \dots, b_n) défini par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, b_i = |\{a \in R_{n,\pi}(i), a < i\}|$$



$$\pi = 63214587$$

$$L_\pi = (S, S, S, S, X, X, X, S, X, S, X, X, S, S, X, X)$$

$$X_\pi = (3, 1, 2, 2) \quad S_\pi = (4, 1, 1, 2)$$

$$\pi_{RF} = 31265478$$

$$L_{\pi_{RF}} = (S, S, X, S, X, X, S, S, X, X, X, S, X, S, X)$$

$$X_{\pi_{RF}} = (1, 2, 3, 1, 1) \quad S_{\pi_{RF}} = (2, 1, 3, 1, 1)$$

$$X_\pi^R = (2, 2, 1, 3)$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\overline{X_\pi^R} = (1, 2, 3, 1, 1) = X_{\pi_{RF}}$$

Lemme. Soit $\pi \in SS_n$, si on note :

- $X = (x_1, \dots, x_k)$ X -specification de L

- $X_{RF} = (x'_1, \dots, x'_k)$ X -specification de L_{RF}

- $X^R = (x_k, \dots, x_1)$

Alors X_{RF} et X^R sont conjuguées, ie :

$$\overline{X^R} = X_{RF}$$

Lemme. Une LAS de $\pi \in SS_n$ est égale au nombre de composants d'une S -specification (X -specification) de L .

Démonstration. Si L est une séquence pour trier π et sa S -specification : (s_1, \dots, s_l) , alors π doit avoir exactement l sous-suites décroissantes de taille s_i .

Soit A une LAS de π de taille k .

Alors $k \leq l$ car 2 éléments de A ne peuvent être dans un même s_i .

Réciproquement soit $D = (d_1, \dots, d_l)$ où d_i est le dernier élément de la i -ème sous suite décroissante. On remarque que d_i est aussi le premier élément mit par l'action du i ème X -groupe. Donc D convient.

Démonstration. Si k désigne ce nombre par le lemme 1 et 2, on a :

$$k = n+1 -k$$

En effet :

$$RF : SS_n \rightarrow SS_n$$

qui a une permutation π associe π_{RF} est une bijection.

9.3 Partie 6

Lemme. Si $\sigma \in S_p$

$$|Av_n(\sigma)| = |Av_n(\sigma^s)|$$

où σ^s est la réflexion de σ définie par :

$$\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_n$$

$$\sigma^s = \sigma_n \dots \sigma_1$$

Démonstration. On représente les permutations par des matrices : $M(\sigma) = (\delta_{i,\sigma(j)})_{i,j}$ $M(231) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On a

$$M(\sigma)^t = M(\sigma^s)$$

Donc

$$|Av_n(231)| (= |Av_n(132)|) = |Av_n(312)| (= |Av_n(213)|) = C_n$$

Fort de ce constat, pour établir le théorème il nous suffit donc de montrer par exemple que $|Av_n(123)| = |Av_n(132)|$, puisque $123^s = 321$. A ce titre considérons :

$$f : \pi \in Av_n(123) \longrightarrow \pi' \in Av_n(132)$$

où $\pi'(i) = \pi(i)$ si i est un minimum de gauche à droite.

On pose $LRm(\pi)$ l'ensemble de ces minimums de gauche à droite et on définit pour $i \notin LRm(\pi)$:

$$\pi'(i) = \min \{a, a > \pi'(i-1) \text{ et } a \neq \pi'(j), j \in [1, i-1] \text{ et } a \notin LRm(\pi)\}$$

On vérifie que π' est bien dans $Av_n(132)$. On note qu'une fois les minimums de gauche à droite fixés alors il n'y a qu'une seule façon de compléter la permutation pour qu'elle soit dans $Av_n(132)$. On obtient f^{-1} par :

$$\pi(i) = \max \{a, a \neq \pi'(j), j \in [1, i-1] \text{ et } a \notin LRm(\pi)\}$$

Exemple. $\pi = \overline{8} \overline{6} 10 9 \overline{4} \overline{3} 7 \overline{1} 5 2$ donne $\pi = \overline{8} \overline{6} 7 9 \overline{4} \overline{3} 5 \overline{1} 2 10$