CHAPITRE 1

Ordre, inégalités

I Borne supérieure

Rappel I.1.

Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée possède une borne supérieure.

Contre-exemple dans $\mathbb{Q}$: L'ensemble $A = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r^2 < 2\}$ ne possède pas de borne supérieure rationnelle. En effet, supposons qu'il en ait une et posons $C = \sup A \in \mathbb{Q}$. Alors $0 \leq C \leq \sqrt{2}$ car $\sqrt{2}$ est un majorant de A, et $0 \in A$. Mieux, $C < \sqrt{2}$ car $\sqrt{2}$ est irrationnel. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $0 \leq C < r < \sqrt{2}$. Donc $r^2 < 2$, donc C n'est pas le supremum de A.

Proposition I.2.

Soit $c \in \mathbb{R}$. Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, alors on a l'équivalence :

$$c = \sup A \iff \forall x \in A,\ x \leq c \text{ et } \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ c - \varepsilon < x \leq c$$

Applications

1. Le théorème de la limite monotone pour les suites réelles bornées en est une.
2. Considérons une fonction $f : \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}$ croissante et majorée. Alors f possède une limite finie en $+\infty$. En effet, posons $\ell = \sup f$, et fixons $\varepsilon > 0$. Il existe alors $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tel que $\ell - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq \ell$. La croissance de f assure de plus que pour tout $x \geq x_\varepsilon$, $\ell - \varepsilon < f(x) \leq \ell$. Donc, $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$.

Proposition I.3.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée.

- $\rightarrow$ Si $\lambda > 0$, alors $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$.
- $\rightarrow$ Si $a \in \mathbb{R}$, $\sup(a + A) = a + \sup(A)$.

De même, considérons des fonctions f et g d'un ensemble non vide I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- $\rightarrow$ Si $\lambda > 0$, alors $\sup(\lambda f) = \lambda \sup(f)$.
- $\rightarrow$ Si $a \in \mathbb{R}$, $\sup(a + f) = a + \sup(f)$.
- $\rightarrow$ $\sup(f + g) \leq \sup(f) + \sup(g)$.

Preuve de l'inégalité : Pour tout $x \in I$, $f(x) + g(x) \leq \sup(f) + \sup(g)$.
Donc $\sup(f + g) \leq \sup(f) + \sup(g)$

Corollaire I.4.

Soient a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty : \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \sup(|f|) \end{aligned}$$

est une norme.

Supremum d'un ensemble paramétré par deux variables

Soient A et B deux ensembles non vides, et $f : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction majorée. Montrons que

$$\sup f = \sup_{x \in A}\left(\sup_{y \in B}(f(x,y))\right) = \sup_{y \in B}\left(\sup_{x \in A}(f(x,y))\right)$$

Posons $M = \sup f$, et pour tout $x \in A$, posons $\mu_x = \sup\limits_{y \in B}(f(x,y))$. Pour tout $x \in A$, et pour tout $y \in B$, $f(x,y) \leq M$. Donc, pour tout $x \in A$, $\mu_x \leq M$. Donc $\sup\limits_{x \in A}(\mu_x) \leq M$.
Par ailleurs, pour tout $(x,y) \in A \times B$, $f(x,y) \leq \mu_x \leq \sup\limits_{x \in A}(\mu_x)$. Donc $M \leq \sup\limits_{x \in A}(\mu_x)$. Donc

$$M = \sup_{x \in A}(\mu_x)$$

et la deuxième égalité se démontre de la même manière en échangeant les rôles de x et y.

Considérons maintenant un ensemble non vide Ω indexant une famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ de fonctions d'une partie non vide I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition I.5.

On dit que

→ $(f_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ est majorée si pour tout $x \in I$, la famille de réels $(f_\lambda(x))_{\lambda \in \Omega}$ est majorée.

→ $(f_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ est uniformément majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\lambda \in \Omega$ et pour tout $x \in I$, $f_\lambda(x) \leq M$.

→ $(f_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ est uniformément bornée s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\lambda \in \Omega$ et pour tout $x \in I$, $|f_\lambda(x)| \leq M$.

Si pour tout $x \in I$, $(f_\lambda(x))_{\lambda \in \Omega}$ est majorée, on appelle *enveloppe supérieure de la famille* $(f_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ la fonction

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda \in \Omega}(f_\lambda) : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sup_{\lambda \in \Omega}(f_\lambda(x)) \end{aligned}$$

Proposition I.6.

Si Ω est fini et si les f_λ sont continues, alors $\sup\limits_{\lambda \in \Omega}(f_\lambda)$ est continue.

Preuve : Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues sur I et à valeurs réelles.

Il est aisé de vérifier — donc loisible de retenir — que $\sup(f_1, f_2) = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|)$, ce qui assure sa continuité.

Le principe de récurrence finie assure alors que $\sup\limits_{\lambda\in\Omega}(f_\lambda)$ est continue.

Contre-exemple avec une famille infinie : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$, posons $f_n(x) = 1 - x^n$. La famille de fonctions ainsi définie est uniformément bornée par 1 donc son enveloppe supérieure est bien définie.
Or, $\left(\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(f_n)\right)(1) = 0$ et pour tout $x \in [0,1[$, $\left(\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(f_n)\right)(x) = 1$, donc l'enveloppe supérieure des f_n n'est pas continue.

II Encadrements

Proposition II.1.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$a \leq b \iff \forall \varepsilon > 0,\ a \leq b + \varepsilon$$

Preuve : $(\Rightarrow)$ Cette implication est immédiate.
$(\Leftarrow)$ Supposons que $a > b$ et posons $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2}$. Alors, par hypothèse, $a \leq \dfrac{a+b}{2}$ mais $\dfrac{a+b}{2} < a$ car $b < a$. Donc $a \leq b$.

Encadrements de fractions
Si $0 \leq a' \leq a \leq a''$ et $0 < b' \leq b \leq b''$ alors $\dfrac{a'}{b''} \leq \dfrac{a}{b} \leq \dfrac{a''}{b'}$

Valeurs absolues

→ Si $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leq M \iff -M \leq x \leq M$.

→ **Inégalité triangulaire :** Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $(z_1, \ldots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$. Alors

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \qquad \text{et} \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

Preuve de l'inégalité triangulaire : Avec deux complexes,

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2\,|z_1 z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

d'où la majoration. Remarquons qu'en l'appliquant à nouveau, il vient que

$$|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_2| \qquad \text{et} \qquad |z_2| = |z_2 + z_1 - z_1| \leq |z_1 + z_2| + |z_1|$$

d'où la minoration. Une récurrence permet de généraliser la majoration à n complexes.

Extension : Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} |z_n|$ converge, alors $\sum\limits_{n\geq 0} z_n$ converge également et $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z_n\right| \leq \sum\limits_{n\geq 0} |z_n|$.

Application

Soit $(u_n) \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \neq 0$. Alors $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\ell}$.
En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\ell}\right| = \dfrac{|u_n - \ell|}{|\ell u_n|}$. Par ailleurs, il existe $n_\ell \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier

$n \geq n_\ell$, $|\ell| - |u_n| \leq |u_n - \ell| \leq \dfrac{|\ell|}{2}$. Donc

$$0 \leq \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| \leq \frac{2\,|u_n - \ell|}{|\ell|^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qu'il fallait démontrer.

Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire

Les points d'affixes $z_1, \ldots, z_n$ sont sur une même demi-droite d'origine O. En effet, raisonnons par récurrence en introduisant, pour tout entier $n \geq 2$, l'assertion

$$\mathcal{P}_n : « \forall (z_1, \ldots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n,\ \left(\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \Longrightarrow \forall k \in [\![1;n]\!],\ \exists \lambda_k \in \mathbb{R}^+,\ z_k = \lambda_k z_1\right) »$$

étant entendu que les implications réciproques sont immédiates.

→ Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ tels que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. En élevant l'égalité au carré, il vient que $\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) = |z_1\overline{z_2}|$. Donc la partie imaginaire de $z_1\overline{z_2}$ est nulle. Mieux, il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $z_1\overline{z_2} = k$, donc $\overline{z_2} = \dfrac{k}{|z_1|^2}\overline{z_1}$ donc $z_2 = \dfrac{k}{|z_1|^2}z_1$. Donc $\mathcal{P}_2$ est vraie.

→ Soit n un entier supérieur ou égal à 2 tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.
Soit $(z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}) \in (\mathbb{C}^*)^{n+1}$ tel que $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$. Alors,

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| \leq |z_{n+1}| + \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$$

L'égalité du majorant et du minorant assure que cet encadrement est une égalité, si bien que $\cancel{|z_{n+1}|} + \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \cancel{|z_{n+1}|} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k|$. Or, $\mathcal{P}_n$ est vraie, donc pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}^+$ tel que $z_k = \lambda_k z_1$.
Par le même raisonnement qu'à l'initialisation, l'égalité $\left|z_{n+1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = |z_{n+1}| + \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right|$ assure l'existence de $\lambda_{n+1} \in \mathbb{R}^+$ tel que $z_{n+1} = \lambda_{n+1} z_1$.
Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

→ Finalement, le principe de récurrence assure que le cas d'égalité est vérifié si, et seulement si, les vecteurs d'affixes $z_1, \ldots, z_n$ sont colinéaires et de même sens, donc que les points d'affixes $z_1, \ldots, z_n$ appartiennent à une même demi-droite d'origine O.

Exercice II.2.

Soit p un entier supérieur ou égal à 3. Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=n}^{n+p-1} u_k$.

1. Montrer que toute racine du polynôme caractéristique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est simple.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire avec des sommes de séries

Soit $(z_n) \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$ telle qu $\sum_{n\geq 0} |z_n|$ converge. Donnons une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} z_n\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} |z_n|$$

Montrons qu'il s'agit de la même condition que dans le cas réel *i.e.* pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tel que $z_n = \lambda_n z_0$.

C'est une condition suffisante car pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{n=0}^{N} z_n\right| = |z_0| \sum_{n=0}^{N} \lambda_n = \sum_{n=0}^{N} |\lambda_n z_0| = \sum_{n=0}^{N} |z_n|$.

Montrons qu'elle est nécessaire. Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left|\sum_{n=0}^{N} z_n\right| < \sum_{n=0}^{N} |z_n|$.

Alors

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} z_n\right| \leq \left|\sum_{n=0}^{N} z_n\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} z_n\right| < \sum_{n=0}^{+\infty} |z_n|$$

ce qui est faux. Donc pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{n=0}^{N} z_n\right| = \sum_{n=0}^{N} |z_n|$. Le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire assure alors que tous les termes de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont sur une même demi-droite d'origine O.

Exercice II.3.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, et posons $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et $\rho = \max\{|z| \mid P(z) = 0\}$.

1. Montrer que $\rho \leq 1 + \max_{k\in[\![0;n-1]\!]} (|a_k|)$.
2. Montrer que $\rho \leq \max\left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right)$.

Application II.4.

Considérons une famille $(P_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ de polynômes unitaires et de même degré $n \geq 2$ définie par

$$\forall \lambda \in \Omega, \quad P_\lambda = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\lambda} X^k$$

Si la famille de complexes $(a_{k,\lambda})_{k\in[\![0;n-1]\!],\lambda\in\Omega}$ ainsi définie est bornée, alors les racines des P_λ forment une partie bornée du plan.

III Inégalités classiques

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz) III.1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Preuve : Examinons la différence $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_i^2\right)$. En développant, les termes $x_i^2 y_i^2$ se simplifient.
De la somme au carré il ne reste que les doubles produits $2x_i y_i x_j y_j$ avec $i < j$, et du produit de sommes il ne reste que les produits mixtes symétriquement regroupés $x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2$ avec $i < j$ Ainsi,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_i^2\right) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(2(x_i y_j)(x_j y_i) - (x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2)\right) = -\sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \leq 0$$

Identité de Lagrange : Pour $n = 2$, on a l'identité remarquable valable dans tout anneau commutatif

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les complexes : À l'aide de l'inégalité triangulaire, elle devient immédiate. Soient $(z_1, \ldots, z_n)$ et $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{C}^n$. Alors

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k \omega_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|\,|\omega_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_i|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\omega_k|^2}$$

Cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$

Corollaire III.2.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

→ L'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité.

→ Tous les mineurs d'ordre 2 de la matrice $Z := \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ y_1 & \ldots & y_n \end{pmatrix}$ sont nuls.

→ $\mathrm{rg}(Z) \leq 1$.

→ $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ sont colinéaires.

L'exercice suivant nécessite des notions présentées dans un chapitre ultérieur

Exercice III.3.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère l'espace des colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ et on note $\|\cdot\|$ sa norme euclidienne.
Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}$. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\|X\|^2 \leq \sqrt{\langle AX|X\rangle}\sqrt{\langle A^{-1}X|X\rangle}$$

Exercice III.4.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Notons E l'ensemble $\left\{X = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}$.

Calculer $m = \min_{X \in E} \left(\sum_{1 \leq i \neq j \leq n} x_i x_j \right)$ et $M = \max_{X \in E} \left(\sum_{1 \leq i \neq j \leq n} x_i x_j \right)$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales
Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un segment réel $[a, b]$. Alors,

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t} \sqrt{\int_a^b |g(t)|^2 \,\mathrm{d}t}$$

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, posons $t_k = a + k \times \dfrac{b-a}{n}$.
Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, posons $x_k = f(t_k)$ et $y_k = g(t_k)$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right| \leq \sqrt{\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \sqrt{\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} |y_k|^2}$$

En passant à la limite $n \longrightarrow +\infty$, on obtient ce qu'on voulait démontrer.

Inégalité de Minkowski : $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$. En effet,

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchy-Schwarz}}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \right)^2$$

et le cas d'égalité est également réalisé lorsque $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ sont colinéaires.
On a un énoncé analogue avec les intégrales de fonctions continues par morceaux.

Inégalité de réarrangement : Supposons que $x_1 \leq \cdots \leq x_n$ et $y_1 \leq \cdots \leq y_n$. Alors, pour toute $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$\sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)} y_j \leq \sum_{i=1}^{n} x_i y_j$$

Preuve : L'ensemble $\mathfrak{S}_n$ est fini donc il existe une partie P de $\mathfrak{S}_n$ tel que pour toute $\sigma \in P$, $\sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)} y_j$ est maximale.
Si l'identité est dans P, il n'y a rien à démontrer. Supposons le contraire, et introduisons l'application

$$\begin{aligned} \varphi : P &\longrightarrow [\![1; n]\!] \\ \sigma &\longmapsto \min\{j \in [\![1; n]\!] \mid \sigma(j) \neq j\} \end{aligned}$$

puis, posons $i = \max(\varphi)$, et notons σ une permutation de P où ce maximum est atteint. Enfin, posons $k = \sigma^{-1}(i)$. Par construction $\sigma(i) > i$ et $k > i$. Alors, $(x_{\sigma(i)} - x_i)(y_k - y_i) \geq 0$, donc, en développant

$$x_i y_k + x_{\sigma(i)} y_i \leq x_{\sigma(i)} y_k + x_i y_i$$

Considérons la permutation $\tilde{\sigma} = \tau_{\sigma(k),\sigma(i)} \circ \sigma$. L'inégalité se réécrit à l'aide de $\tilde{\sigma}$:

$$x_{\sigma(k)}y_k + x_{\sigma(i)}y_i \leq x_{\tilde{\sigma}(k)}y_k + x_{\tilde{\sigma}(i)}y_i$$

et, étant donné que σ et $\tilde{\sigma}$ coïncident en tout point de $[\![1;n]\!]$ distinct de i et de k, alors

$$\sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)}y_j \leq \sum_{i=1}^{n} x_{\tilde{\sigma}(i)}y_j$$

Donc $\tilde{\sigma} \in P$. Mais, par construction, $\varphi(\tilde{\sigma}) > i = \max(\varphi)$ ce qui est faux. Donc l'identité est dans P, ce qu'il fallait démontrer.

IV Étude de fonctions

1. Fonctions homographiques

Soient $c \neq 0$, et $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. La fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{c}{d} \right\}, \qquad f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

est une fonction homographique. Elle est strictement monotone car sa dérivée est de signe constant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{c}{d} \right\}, \qquad f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

2. Accroissements finis

Théorème (Théorème des accroissements finis) IV.1.

Soient a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f \in \mathscr{C}([a,b], \mathbb{C})$, telle que f soit dérivable sur $]a,b[$.
Si $f([a,b]) \subset \mathbb{R}$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Contre-exemple dans $\mathbb{C}$: Un tel c n'existe pas si $a = 0$, $b = 2\pi$, et si on choisit f telle que pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $f(x) = e^{ix}$.

Théorème (Inégalité des accroisements finis) IV.2.

Soient a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f \in \mathscr{C}([a,b], \mathbb{C})$, telle que f soit dérivable sur $]a,b[$.
Si $|f'|$ est bornée par $M \geq 0$, alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$$

Si de plus, f' est continue sur $[a,b]$, on a l'égalité $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t$ donc

$$|f(b) - f(a)| \leq \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leq \|f'\|_{\infty,[a,b]}\,(b-a)$$

Remarque : Il est aisé de démontrer que $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ à partir de l'inégalité analogue réelle.
En effet, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| e^{i\theta}$.
Donc $\int_a^b e^{-i\theta} f(t)\mathrm{d}t = \left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^b e^{-i\theta} f(t)\mathrm{d}t\right|$. Puis, en introduisant les fonctions réelles u et v telles que $u + iv = e^{-i\theta} f$, il vient

$$\int_a^b u(t)\mathrm{d}t + i\int_a^b v(t)\mathrm{d}t = \left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right|$$

Donc $\int_a^b v(t)\mathrm{d}t = 0$. Ainsi

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_a^b u(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |u(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b \left|e^{-i\theta} f(t)\right|\mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

3. Puissances

Exemple

Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$. Soit $r \in]0,1[$ tel que $\sum_{n\geq 0} a_n^r$ converge. Montrons que $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge.
Il suffit de remarquer qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_1$, $0 \leq a_n \leq a_n^r < 1$, car $a_n^r \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'où la convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n$.

Clairement, cet exemple sert à rappeler que $q \leq q^r$ si $q \in [0,1]$.

Lemme IV.3.

Soit $r \in]0,1[$. Alors, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$,

$$(x+y)^r \leq x^r + y^r$$

Preuve : Sans perte de généralité, soient $x > 0$ et $y > 0$. Considérons la fonction φ définie par

$$\forall t > 0, \varphi(t) = t^r + 1 - (1+t)^r$$

φ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $t > 0$, $\varphi'(t) = r(t^{r-1} - (1+t)^{r-1}) \geq 0$, donc φ est croissante.
Or $\varphi(0) = 0$ donc $\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \geq 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice similaire : On montre pareillement que si $r \geq 1$, pour tous $x, y \geq 0$, $(x+y)^r \geq x^r + y^r$.

4. Trigonométrie

Applications

1. Une récurrence et une formule d'addition permettent de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(nx)| \leq n\,|\sin(x)|$.
2. L'exploitation de la concavité de la fonction sinus sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ permet de montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$.

3. Un calcul aisé permet de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$$

En effet, si $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, et $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} &= \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{e^{i(n+1)x/2}\big(e^{i(n+1)x/2} - e^{-i(n+1)x/2}\big)}{e^{ix/2}\big(e^{ix/2} - e^{-ix/2}\big)} \\ &= e^{inx/2} \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

d'où le résultat. On dit alors que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est uniformément bornée en n à x fixé.

Correction de l'exercice II.2. :

1. Le polynôme caractéristique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

$$P = X^p - \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} X^k = X^p - \frac{1}{p}\frac{X^p - 1}{X - 1} = \frac{\overbrace{pX^{p+1} - (p+1)X^p + 1}^{\text{noté } Q}}{p(X-1)}$$

et $Q' = p(p+1)X^{p-1}(X-1)$. 1 est une racine simple de P car c'est une racine double de Q. Par ailleurs, toute racine de P distincte de 1 est une racine de Q avec la même multiplicité dans les deux polynômes. Or 0 n'est pas racine de P, donc toute racine de P distincte de 1 est simple. Donc toute racine de P est simple.

2. Soit z une racine de P. Supposons que $|z| > 1$. Alors, pour tout entier naturel $k < p$, $|z|^p > |z|^k$, donc $p\,|z|^p > \sum_{k=0}^{p-1} |z|^k \underset{\substack{\uparrow\\ \text{inégalité triangulaire}}}{\geq} \left|\sum_{k=0}^{p-1} z^k\right| = p\,|z|^p$ ce qui est faux.

Donc $|z| \leq 1$. Si $z \in \mathbb{U}$, $p\,|z|^p = \sum_{k=0}^{p-1} |z|^k$. Le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire assure alors que pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, z^k appartient à la demi-droite réelle positive. Donc $z = 1$.
Les $p-1$ autres racines de P sont de modules strictement inférieurs à 1. Or, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une combinaison linéaire de suites géométriques dont les raisons sont les racines de P, et ces suites sont convergentes. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction de l'exercice II.3. :

1. Soit z une racine de P tel que $\rho = |z|$. Alors $z^n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$, donc

$$\rho^n = \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right| \underset{\substack{\uparrow\\ \text{inégalité triangulaire}}}{\leq} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\,\rho^k \leq \underbrace{\max_{k\in[\![0;n-1]\!]}(|a_k|)}_{\text{noté } M} \sum_{k=0}^{n-1} \rho^k$$

Si $\rho \leq 1$ alors, l'inégalité à démontrer est vraie. Sinon,

$$\cancel{\rho^n} \leq M \times \frac{\rho^n - 1}{\rho - 1} \leq \frac{M\cancel{\rho^n}}{\rho - 1}$$

donc $\rho \leq 1 + M$.

2. D'après le calcul de la question précédente,

$$\rho^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\,\rho^k$$

→ Si $\rho \leq 1$, il n'y a rien à démontrer.

→ Si $\rho > 1$, alors $\rho \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{\rho^{n-1-k}} \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$.

Correction de l'exercice III.3. :

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour toute matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^{+*})$, et pour tout $U =$

$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a

$$\|U\|^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sqrt{d_i} u_i \times \frac{u_i}{\sqrt{d_i}} \right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchy-Schwarz}}}{\leq} \overbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i u_i^2}}^{\sqrt{\langle DU|U\rangle}} \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^2}{d_i}}}_{\sqrt{\langle D^{-1}U|U\rangle}}$$

Or A est une matrice symétrique réelle définie positive, donc il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $\underbrace{P^\top AP}_{\text{notée } \Delta}$ soit une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs.
Donc

$$\|X\|^2 = \left\|P^\top X\right\|^2 \leq \sqrt{\langle \Delta P^\top X | P^\top X\rangle} \sqrt{\langle \Delta^{-1} P^\top X | P^\top X\rangle} = \sqrt{\langle P\Delta P^\top X | X\rangle} \sqrt{\langle P\Delta^{-1} P^\top X | X\rangle}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice III.4. :

Pour tout $X \in E$, $\sum_{1 \leq i \neq j \leq n} x_i x_j \geq 0$. Or $(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1 \text{ zéros}}, 1) \in E$ et réalise ce minorant, donc $m = 0$. Soit $X \in E$.
$\sum_{1 \leq i \neq j \leq n} x_i x_j = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.
Or, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 1$.
Donc, pour tout $X \in E$,

$$\sum_{1 \leq i \neq j \leq n} x_i x_j \leq 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$$

Ce majorant est atteint en $\left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) \in E$. En effet, $\sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{n^2} \binom{n}{2} = \frac{n-1}{n}$, donc

$$M = \frac{n-1}{n}$$

Le nombre de couples (i, j) de $[\![1; n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ est le double du nombre de couples (i, j) de $[\![1; n]\!]^2$ tel que $i < j$, qui vaut le nombre d'issues possibles lors du choix simultané de 2 éléments distincts d'un ensemble à n éléments, et ce nombre de combinaisons vaut $\binom{n}{2}$.

* * *

Compilé par Mehdi Chouta pour CPGE Paradise le 07 février 2021.
La dernière mise à jour mineure a eu lieu le 09 février 2021.