CHAPITRE 30.2

Indépendance, conditionnement

Dans tout ce chapitre, $(E, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

I Événements indépendants

Définition 1.

Deux événements A et B sont indépendants lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Si $A \cap B = \varnothing$, alors A et B sont indépendants si, et seulement si, A est négligeable ou B est négligeable.

Exemples

→ Un événement négligeable est indépendant de tout autre.

→ Un événement presque sûr est indépendant de tout autre. En effet, si A est presque sûr, et si B est un événement quelconque, alors $B = (A \cap B) \sqcup (\underbrace{A^\complement \cap B}_{\subset A^\complement \text{ qui est négligeable}})$, donc $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$.

Proposition 2.

Si A et B sont deux événements indépendants, alors $A^\complement$ et B sont indépendants.

Preuve : $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A^\complement \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A^\complement \cap B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Donc $\mathbb{P}(A^\complement \cap B) = \mathbb{P}(B)(\underbrace{1 - \mathbb{P}(A)}_{=\mathbb{P}(A^\complement)})$.

Conséquence : Dans ce cas, $B^\complement$ et A sont indépendants, ainsi que $A^\complement$ et $B^\complement$.

Définition 3.

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Des événements $A_1, \dots, A_n$ sont dits mutuellement indépendants lorsque pour tout $I \subset [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$.

Proposition 4.

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements mutuellement indépendants.

→ Si I et $J \subset [\![1;n]\!]$ et $I \cap J = \varnothing$, alors $\bigcap_{i \in I} A_i$ et $\bigcap_{j \in J} A_j$ sont indépendants.

→ $A_1^\complement, A_2, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants.

Conséquence : Les événements de la tribu engendrée par $\{A_1, \dots, A_n\}$ sont mutuellement indépendants.

Exercice 5.

Soit $(E, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements mutuellement indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun d'eux ne se réalise est majorée par $\exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right)$.

II Conditionnement

Loi conditionnelle

Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

Pour tout $B \in \mathcal{T}$, posons $\mathbb{P}(B \mid A) = \dfrac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$. Alors $\mathbb{P}(\cdot \mid A)$ est une probabilité sur $(E, \mathcal{T})$. Elle vérifie les propriétés suivantes :

→ $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)$.

→ Si A et B sont deux événements indépendants (au sens de $\mathbb{P}$), alors $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$.

→ Si n est un entier supérieur ou égal à 3, et $A_1, \dots, A_n$ sont des événements tels que, pour tout $i \in [\![1; n-1]\!]$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{i} A_k\right) > 0$, alors,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \dots \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

→ Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de E telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_n) > 0$, alors pour tout événement B non négligeable, on a

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \mid A_n)\mathbb{P}(A_n) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(A_n \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_n)\mathbb{P}(A_n)}{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \mid A_n)\mathbb{P}(A_n)}$$

III Tribus indépendantes

Définition 6.

Soit I un ensemble contenant au moins deux éléments.
Une famille $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ de tribus sur E est dite indépendante lorsque, pour tout ensemble fini $J \subset I$, toute famille $(A_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} \mathcal{T}_j$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

Indépendance de tribus engendrées par des partitions indépendantes

Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux partitions de E telles que, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, A_n et B_n soient indépendants. Les tribus engendrées par ces partitions, $\mathcal{T}_A = \left\{ \bigcup_{n\in I} A_n \;\middle|\; I \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \right\}$ et $\mathcal{T}_B = \left\{ \bigcup_{n\in I} B_n \;\middle|\; I \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \right\}$, sont indépendantes.

En effet, pour tous I et $J \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, en utilisant le théorème d'associativité pour les familles sommables,

$$\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{n\in I} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{p\in J} B_n\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{(n,p)\in I\times J} (A_n \cap B_p)\right) = \sum_{(n,p)\in I\times J} \underbrace{\mathbb{P}(A_n \cap B_p)}_{\mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B_p)} = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in I} A_n\right)\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in J} B_n\right)$$

IV Borel-Cantelli

Théorème 7.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants telle que $\sum\limits_{n\geq 0}\mathbb{P}(A_n)$ diverge. Alors,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{N=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n\right)\right) = 1$$

Vocabulaire : Si $\omega \in E$ réalise $\bigcap\limits_{N=0}^{+\infty}\left(\bigcup\limits_{n=N}^{+\infty} A_n\right)$ *i.e.* ω appartient à cet ensemble, alors ω réalise une infinité d'événements de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La conclusion de ce théorème assure alors que, presque sûrement, une infinité d'événements de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont réalisés, ou alors que A_n **est réalisé infiniment souvent.**

Preuve : Posons, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $B_N = \bigcup\limits_{n=N}^{+\infty} A_n$. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, $B_N^\complement = \bigcap\limits_{n=N}^{+\infty} A_n^\complement$ et en introduisant la suite décroissante d'événements $\left(C_M^N\right)_{M\in\mathbb{N}} = \left(\bigcap\limits_{n=N}^{M} A_n^\complement\right)_{M\in\mathbb{N}}$, on a, par continuité décroissante

$$\mathbb{P}\left(C_M^N\right) \xrightarrow[M\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(B_N^\complement\right)$$

D'après l'exercice, par indépendance, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout entier $M \geq N$,

$$\mathbb{P}\left(C_M^N\right) \leq \exp\left(-\sum_{n=N}^{M}\underbrace{\mathbb{P}(A_n)}_{=\mathbb{P}\left((A_n^\complement)^\complement\right)}\right)$$

donc en passant à la limite $M \longrightarrow +\infty$, il vient $\mathbb{P}(B_N^\complement) = 0$.

Donc $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{N=0}^{+\infty} B_N^\complement\right) = 0$ car $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{N=0}^{+\infty} B_N^\complement\right) \leq \underbrace{\sum_{N=0}^{+\infty}\mathbb{P}\left(B_N^\complement\right)}_{\text{somme d'une série convergente}}$. En passant au complémentaire, on obtient la conclusion du théorème.

Théorème 8.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements telle que $\sum\limits_{n\geq 0}\mathbb{P}(A_n)$ converge. Alors,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{N=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n\right)\right) = 0$$

Preuve : En reprenant les notations de la preuve précédente, $(B_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements, donc par continuité décroissante

$$\mathbb{P}(B_N) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{N=0}^{+\infty} B_N\right)$$

Par ailleurs, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(B_N) \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ donc par unicité de la limite, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{N=0}^{+\infty} B_N\right) = 0$, ce qu'on voulait.

Correction de l'exercice 5. :

Par indépendance mutuelle,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^{\complement}\right) = \prod_{i=1}^{n}(1-\mathbb{P}(A_i)) \leq \prod_{i=1}^{n} e^{-\mathbb{P}(A_i)} = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)\right)$$

Il est loisible de retenir que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$.

* * *

Compilé par Mehdi Chouta pour CPGE Paradise le 11 février 2021.