



Couples de variables aléatoires

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Dans tout ce chapitre, les variables aléatoires sont définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans l'espace mesurable $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

I Loi conjointe, loi marginale

Définition 1.

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes. La loi conjointe de (X, Y) est définie par

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^d)^2, \quad \mathcal{L}_{(X,Y)}(\{(x, y)\}) = \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

Les lois \mathcal{L}_X et \mathcal{L}_Y sont appelées lois marginales de $\mathcal{L}_{(X,Y)}$.

Remarque 2.

Les lois marginales se calculent à partir de la loi conjointe :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{y \in Y(\Omega)} [X = x] \cap [Y = y]\right) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathcal{L}_{(X,Y)}(\{(x, y)\})$$

Exercice 3.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telles que pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$

$$\mathcal{L}_{(X,Y)}(\{(i, j)\}) = \frac{1}{2^{i+j+2}}$$

1. Vérifier que $\mathcal{L}_{(X,Y)}$ est bien une loi de probabilité.
2. Calculer les lois marginales \mathcal{L}_X et \mathcal{L}_Y .
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

II Produit de convolution

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. On définit le produit de convolution de \mathcal{L}_X et \mathcal{L}_Y , et note $\mathcal{L}_X \star \mathcal{L}_Y$, par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{L}_X \star \mathcal{L}_Y)(\{n\}) = \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i+j=n}} \mathcal{L}_X(\{i\}) \mathcal{L}_Y(\{j\})$$

Si, de plus, X et Y sont indépendantes, alors $\mathcal{L}_{X+Y} = \mathcal{L}_X \star \mathcal{L}_Y$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i+j=n}} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \sum_{\substack{\uparrow (i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ \text{indépendantes} \\ i+j=n}} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j) = (\mathcal{L}_X \star \mathcal{L}_Y)(\{n\})$$

Exemples : On suppose que $d = 1$.

→ **Produit de convolution de lois binomiales :** Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Soient X_1, \dots, X_{n+m} des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi $\mathcal{B}(p)$. Posons $X = X_1 + \dots + X_n$ et $Y = X_{n+1} + \dots + X_{n+m}$. Alors \mathcal{L}_{X+Y} est une loi binomiale $\mathcal{B}(n+m, p)$.

🐟 **Produit de convolution de lois de Poisson :** Soient $\lambda, \mu > 0$. Posons $\mathcal{L}_1 = \mathcal{P}(\lambda)$ $\mathcal{L}_2 = \mathcal{P}(\mu)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_1 \star \mathcal{L}_2)(\{n\}) &= \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i+j=n}} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^j}{j!} e^{-\mu} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i+j=n}} \frac{1}{n!} \binom{n}{i} \lambda^i \mu^{n-i} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{i=0}^n \frac{1}{n!} \binom{n}{i} \lambda^i \mu^{n-i} = \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!} e^{-(\lambda+\mu)} \end{aligned}$$

On reconnaît une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Correction de l'exercice 3. :

1.  Le nombre de manières d'écrire un entier naturel n non nul sous la forme d'une somme de deux entiers naturels vaut le nombre de manières de placer un baton parmi n objets alignés de sorte à les scinder en deux groupes d'objets en autorisant toutefois qu'au moins l'un des groupes n'en contienne aucun. De tels emplacements pour le baton, il y en a $n + 1$. Ainsi, dans la somme calculée ci-dessous, il y a $n + 1$ termes égaux à $\frac{1}{2^{i+j+2}}$ lorsque $i + j = n$.
Ce raisonnement est aisément généralisable si l'on veut écrire un entier naturel non nul sous la forme d'une somme à plus de deux termes d'entier naturel.

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \mathcal{L}_{(X,Y)}(\{(i,j)\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

Donc $\mathcal{L}_{(X,Y)}$ est bien une loi de probabilité.

-  Il est loisible de retenir les sommes des séries dérivées d'une série géométrique convergente. Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$. Alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

2. Soit $i \in \mathbb{N}$.

$$\mathcal{L}_X(\{i\}) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathcal{L}_{(X,Y)}(\{(i,j)\}) = \frac{1}{2^{i+2}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{i+1}} = \mathcal{L}_Y(\{i\})$$

3. Oui, car pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\mathcal{L}_X(\{i\})\mathcal{L}_Y(\{j\}) = \frac{1}{2^{i+j+2}} = \mathcal{L}_{(X,Y)}(\{(i,j)\})$
* * *

Compilé par Mehdi Chouta pour CPGE Paradise le 21 mars 2021.