CHAPITRE 39

Réduction d'endomorphismes symétriques

Notations, rappels et remarques

- Dans ce chapitre, on considère E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$ et de produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ et sa norme associée $\|.\|$.
- On pose $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A^T = A\}$. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et admet la famille suivante comme base
$$\{E_{i,i}\}_{i\in[\![1;n]\!]} \cup \left\{\frac{E_{i,j}+E_{j,i}}{2}\right\}_{1\leq i<j\leq n}.$$
Étant donné le cardinal de cette base, on peut directement en déduire que $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
- On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *i.e.* les matrices $O \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $O^T O = I_n$.
- Si $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $AB \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \iff AB = BA$.
- Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{VP}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A.
- Soit $\beta = (e_1, \ldots, e_n) \in E$ une base de E. On dit que β est une base orthonormée de E si pour tous $i, j \in [\![1;n]\!]$, $\langle e_i,\ e_j\rangle = \mathbb{1}_{i=j}$.
- Une matrice $O \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
- Si $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée quelconque de E, alors on a pour tous $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in E$ et $y = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n \in E$,
$$\langle x,\ y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \text{ et en particulier } \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$
Autrement dit, la forme du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ ne dépend pas de la base orthonormée où on regarde les vecteurs x et y. Cette propriété s'écrit également, en posant $X = [x]_\beta$ et $Y = [y]_\beta$, $\langle x,\ y\rangle = X^TY$.
- Finalement, on reprend les notations du chapitre 29 sur la réduction d'endomorphismes.

I Généralités

Définition I.1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est symétrique si
$$\forall x, y \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle.$$
On note $\mathcal{S}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E),\ u \text{ symétrique}\}$.

Exemples.

- Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur sur F parallèlement à G ($\mathrm{Ker}\, p = G,\ \mathrm{Im}\, p = F$). Alors $p \in \mathcal{S}(E)$ si et seulement si $F \perp G$. Un projecteur (qui est d'ailleurs unique) vérifiant cette propriété est appelé projecteur orthogonal sur F (parallèlement à G). La preuve de cette équivalence est laissée comme exercice au lecteur.

- Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie par rapport à F parallèlement à G. s est symétrique si et seulement si $\frac{1}{2}(\mathrm{Id} - s)$ est une projection orthogonale. En effet, on a

$$s \in \mathcal{S}(E) \iff \frac{1}{2}(\mathrm{Id} - s) \in \mathcal{S}(E) \iff \frac{1}{2}(\mathrm{Id} - s) \text{ est un projecteur orthogonal.}$$

  Lorsque cette propriété est vérifiée, on dit que s est une symétrie orthogonale.
- On peut facilement montrer que $u \in \mathcal{O}(E) \cap \mathcal{S}(E)$ si et seulement si u est une symétrie orthogonale.

Proposition I.2.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

1. u est symétrique.
2. Il existe une base orthonormée $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $[u]_\beta \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
3. pour toute base orthonormée $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ de E, on a $[u]_\beta \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- (1) $\implies$ (3) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Posons $[u]_\beta = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1;n]\!]}$. On a, en utilisant le fait que la base choisie est orthonormée, pour tout $i, j \in [\![1;n]\!]$,

$$a_{i,j} = \langle e_i,\ u(e_j) \rangle = \langle e_j,\ u(e_i) \rangle = a_{j,i}.$$

  Ceci donne bien que $[u]_\beta \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- (3) $\implies$ (2) Cette implication est évidente.
- (2) $\implies$ (1) Soit $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E telle que $[u]_\beta \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Posons $[u]_\beta = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1;n]\!]}$. On a pour tous $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in E$ et $y = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n \in E$, en posant $M = [u]_\beta$, $X = [x]_\beta$ et $Y = [y]_\beta$

$$\langle x,\ u(y) \rangle = X^T M Y = (M^T X)^T Y = (MX)^T Y = \langle u(x),\ y \rangle$$

  Ceci donne bien que $u \in \mathcal{S}(E)$.

□

Corollaire. En fixant β une base orthonormée de E, on peut voir que $S(E) \simeq \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et donc en particulier $\dim \mathcal{S}(E) = \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Remarque. Dans le cas où $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée, il est intéressant de mémoriser les identités suivantes. En posant $[u]_\beta = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1;n]\!]}$, et en considérant $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in E$ et $y = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n \in E$, on a

$$\langle x,\ u(y) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j a_{i,j} \text{ et } \langle u(x),\ y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j a_{j,i},$$

et de même, en posant $A = [u]_\beta$, $X = [x]_\beta$ et $Y = [y]_\beta$, les égalités ci-dessus deviennent

$$X^T A Y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j a_{i,j} \text{ et } (AX)^T Y = X^T A^T Y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j a_{j,i}.$$

Remarquons également qu'on n'a pas supposé que u est symétrique.

II Réduction

Théorème (Théorème spectral) II.1.

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ et soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. Si F est stable par u alors, $F^\perp$ aussi.
2. Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont deux valeurs propres distinctes de u, alors $E_\lambda \perp E_\mu$.
3. $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(u)} E_\lambda$.
4. u est diagonalisable dans une base orthonormée.

Démonstration.

1. Supposons que F est stable par u. On a
$$\begin{aligned} u(F) \subset F &\Longrightarrow \forall (x,y) \in F \times F^\perp,\ \langle u(x),\ y \rangle = 0 \\ &\Longrightarrow \forall (x,y) \in F \times F^\perp,\ \langle x,\ u(y) \rangle = 0 \Longrightarrow u(F^\perp) \subset F^\perp. \end{aligned}$$
2. Soit λ, μ deux valeurs propres de u distinctes. Soit $(x,y) \in E_\lambda \times E_\mu$. On a
$$\lambda \langle x,\ y \rangle = \langle u(x),\ y \rangle = \langle x,\ u(y) \rangle = \mu \langle x,\ y \rangle .$$
Ceci nous donne directement que $\langle x,\ y \rangle = 0$ ce qui est bien le résultat voulu.
3. On envisage plusieurs méthodes, mais on expose ici que la plus classique. Deux méthodes supplémentaires sont disponibles en annexe.

   Procédons par récurrence forte sur n. Le cas $n = 1$ est évident. Intéressons-nous au cas $n = 2$. Supposons que $n = 2$ et soit β une base orthonormée de E. On a, en posant $[u]_\beta = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$,
$$\chi_u = \det(XI_2 - [u]_\beta) = \det \begin{pmatrix} X-a & -b \\ -b & X-d \end{pmatrix} = X^2 - (a+d)X + (ad - b^2).$$
   Calculons le discriminant de ce polynôme. On a
$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - b^2) = (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0.$$
   Deux cas alors se présentent. Si $\Delta > 0$, alors χ_u possède deux racines distinctes et donc deux espaces propres de dimension 1 en somme directe, ce qui est bien le résultat voulu. Sinon, si $\Delta = 0$, alors $a = d$ et $b = 0$ ce qui donne $u = a\,\mathrm{Id}$, et donc il n'y a qu'un seul espace propre égal à l'espace tout entier. Ceci correspond également à ce qu'on cherche à démontrer.

   Passons au cas général. Fixons $n \geq 2$ et supposons que pour tout $k \leq n$, la propriété est vérifiée. Supposons que $\dim E = n+1$. Soit P un facteur unitaire irréductible de μ_u, $x \in \mathrm{Ker}\, P(u) \setminus \{0\}$ et $F = \mathrm{Vect}(x, u(x))$. Posons $P = X^2 + c_1 X + c_2$. On a $u^2(x) + c_1 u(x) + c_2 x = 0$ donc $u^2(x) \in F$. On a également pour tout $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$,
$$u(\theta_1 x + \theta_2 u(x)) = \theta_1 u(x) + \theta_2 u^2(x) \in F,$$
   donc F est stable par u. D'après le point 1, on sait que $F^\perp$ est également stable par u. Il suffit donc de considérer $w = u\Big|_{F^\perp}^{F^\perp} \in \mathcal{S}(F^\perp)$ et $v = u\Big|_F^F \in \mathcal{S}(F)$ et appliquer l'hypothèse de récurrence à ces deux endomorphismes pour avoir le résultat voulu.

4. Il suffit de considérer pour chaque $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(u)$, β_λ une base orthonormée de E_λ, et de considérer $\beta = \bigcup_{\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(u)} \beta_\lambda$. Le point 2 permet de montrer facilement que cette base est orthonormée et la matrice $[u]_\beta$ est diagonale étant donné que β est constituée de vecteurs de propres de u.

□

Corollaire. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \iff \exists O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \exists \Delta \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}),\ A = O\Delta O^{-1} = O\Delta O^T.$$

Démonstration. Le sens réciproque étant évident, on se propose de vérifier le sens direct. Considérons

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R}^n \\ X & \mapsto AX. \end{cases}$$

$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ car est symétrique dans la base canonique qui est orthonormale, ce qui nous donne le résultat voulu en se rappelant qu'un changement d'une base orthonormale vers une autre est fait par une matrice orthogonale. □

Exercice II.2.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Notons $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ ses valeurs propres distinctes et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)^\perp = \mathrm{Im}(A - \lambda I_n) = \bigoplus_{\substack{\mu \in \mathrm{VP}(A) \\ \mu \neq \lambda}} \mathrm{Ker}(A - \mu I)$.
2. En déduire que si $n = 2$, alors

$$\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I_n)^\perp = \mathrm{Im}(A - \lambda_1 I_n) = \mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I_n) = \mathrm{Im}(A - \lambda_2 I_n)^\perp.$$

Exercice II.3.

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. En particulier, exhiber une base orthonormée où A est diagonale.

Exercice II.4.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(\mathrm{Tr}\, A)^2 \leq \mathrm{rg}(A)\,\mathrm{Tr}(A^2)$.

Exercice II.5.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^T A$ et AA^T sont équivalentes.

III Estimations et valeurs propres pour $u \in \mathcal{S}(E)$

Proposition III.1.

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Soit $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de u telle que $[u]_\beta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Les propriétés suivantes sont vérifiées.

1. Pour tous $s = s_1 e_1 + \cdots + s_n e_n \in \mathbb{R}^n$ et $t = t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\langle u(s),\ t\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i t_i, \text{ et en particulier } \langle u(s),\ s\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i^2.$$

2. $\min\limits_{||x||=1} \langle u(x), x\rangle = \lambda_1$ et $\max\limits_{||x||=1} \langle u(x), x\rangle = \lambda_n$.

Démonstration.

1. On a

$$\langle u(s),\ t\rangle = \left\langle u\left(\sum_{i=1}^{n} s_i e_i\right), \sum_{i=1}^{n} t_i e_i\right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i e_i, \sum_{i=1}^{n} t_i e_i\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i t_i.$$

La seconde inégalité découle directement du résultat ci-dessus.

2. Soit $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in E$ tel que $\|x\| = 1$, *i.e.* $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. On a

$$\langle u(x),\ x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.$$

De plus,

$$\lambda_1 = \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda_n$$

La borne supérieure est atteinte lorsque $x = e_n$ et la borne inférieure est atteinte lorsque $x = e_1$. On en déduit donc qu'on a bien $\min\limits_{||x||=1} \langle u(x), x\rangle = \lambda_1$ et $\max\limits_{||x||=1} \langle u(x), x\rangle = \lambda_n$.

□

Exercice III.2.

On reprend les mêmes notations que ci-haut. Soit $\mu \in \mathbb{R}$. Posons

$$F_\mu = \{x \in E,\ \langle u(x), x\rangle = \mu \langle x, x\rangle\}.$$

Montrer que F_μ est un sous-espace vectoriel de E non trivial si et seulement si $\mu = \lambda_1$ ou $\mu = \lambda_n$.

Correction de l'exercice II.2 :

1. Soit $X \in \mathrm{Im}(A-\lambda I)$ et soit $U \in \mathbb{R}^n$ tel que $X = AU - \lambda U$. On a pour tout $Y \in \mathrm{Ker}(A-\lambda I)$

$$X^TY = (AU-\lambda U)^TY = U^TAY - \lambda U^TY = U^T(AY-\lambda Y) = 0.$$

Ceci nous donne l'inclusion $\mathrm{Im}(A-\lambda I) \subset \mathrm{Ker}(A-\lambda I)^\perp$. On a de plus, d'après la formule du rang, $\dim \mathrm{Im}(A-\lambda I_n) = n - \dim \mathrm{Ker}(A-\lambda I)$ et étant donné que $\mathrm{Ker}(A-\lambda I)^\perp$ est un supplémentaire (en dimension finie) de $\mathrm{Ker}(A-\lambda I)$ dans $\mathbb{R}^n$, on a également

$$\dim \mathrm{Ker}(A-\lambda I)^\perp = n - \dim \mathrm{Ker}(A-\lambda I) = \dim \mathrm{Im}(A-\lambda I),$$

et donc finalement $\mathrm{Im}(A-\lambda I) = \mathrm{Ker}(A-\lambda I)^\perp$. Pour finir, l'égalité

$$\mathrm{Ker}(A-\lambda I)^\perp = \bigoplus_{\substack{\mu \in \mathrm{VP}(A) \\ \mu \neq \lambda}} \mathrm{Ker}(A-\mu I)$$

est une conséquence directe du point 1 du théorème II.1.

2. L'égalité de cette question est une conséquence immédiate de la question précédente.

Correction de l'exercice II.3 :

On commence d'abord pour calculer le polynôme caractéristique de A. On a

$$\begin{aligned}
\det(XI_3 - A) &= \begin{vmatrix} X-2 & -1 & 1 \\ -1 & X-2 & 1 \\ 1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-2 & -1 & 0 \\ -1 & X-2 & X-1 \\ 1 & 1 & X-1 \end{vmatrix} \\
&= (X-1)\begin{vmatrix} X-2 & -1 & 0 \\ -1 & X-2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (X-1)\left(- \begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ -1 & X-2 \end{vmatrix} \right) \\
&= (X-1)^2(X-4).
\end{aligned}$$

Étant donné que A est diagonalisable (car réelle symétrique), on peut affirmer que $\dim \mathrm{Ker}(I_3 - A) = 2$ (voir proposition V.6 du chapitre 29 sur la réduction d'endomorphismes).

$$(A - I_3)X = 0 \text{ où } X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^3.$$

On a

$$(A-I_3)X = 0 \iff \begin{cases} x+y-z &= 0 \\ x+y-z &= 0 \\ -x-y+z &= 0 \end{cases} \iff x+y-z = 0.$$

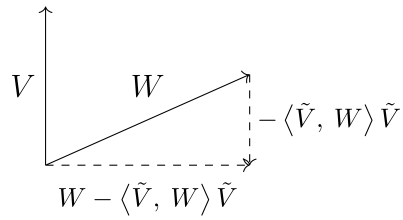
Ceci signifie que $\mathrm{Ker}(A - I_3)$ est l'hyperplan caractérisé par l'équation $x+y-z = 0$. Cet hyperplan est de vecteur normal $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T$. On en déduit que pour trouver une base de diagonalisation de A, il suffit de trouver une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(A-I_3)$ et de la concaténer avec $\tilde{U} = \dfrac{U}{\|U\|}$ (car $\mathrm{Ker}(A-I_3)$ est caractérisé par l'équation $\langle X, U \rangle = 0$). Pour ce faire, deux approches sont possibles.

→ **Approche 1 :** Si on peut facilement trouver une famille libre de l'hyperplan, on peut l'orthonormaliser avec le procédé de Schmidt (ici pour deux vecteurs, qui est donc assez simple). On considère les deux vecteurs

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \text{ et } W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T.$$

Il est facile de montrer que $(V, W) \in \text{Ker}(A - I_3)$ et qu'il s'agit d'une famille libre. Il reste donc à orthonormaliser cette famille. Pour ce faire, on considère les transformations de V, W suivantes

$$\tilde{V} = \frac{V}{\|V\|} \text{ et } \tilde{W} = \frac{W - \left\langle \tilde{V},\, W \right\rangle \tilde{V}}{\left\| W - \left\langle \tilde{V},\, W \right\rangle \tilde{V} \right\|}.$$



Le calcul de ces quantités donne

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},\ \tilde{W} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2/3} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{U} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

On en déduit donc qu'en posant

$$O = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2/3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$O^T AO$ devrait être diagonale, et en effet, après calcul, on trouve

$$O^T AO = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2/3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2/3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

→ **Approche 2 :** Lorsque trouver une base n'est pas évident, on peut procéder de la manière suivante. On commence par considérer un vecteur quelconque V de $\text{Ker}(A - I_3)$, par exemple le même qu'avant, $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$. Ensuite, on cherche un vecteur dans l'orthogonal de $\text{Vect}(U, V)$ en résolvant les équations suivantes

$$\begin{cases} \langle U,\ X \rangle & = 0 \\ \langle V,\ X \rangle & = 0 \end{cases} \quad i.e. \quad \begin{cases} x + z & = 0 \\ x + y - z & = 0, \end{cases}$$

ce qui donne $X = (x, y, z)^T = (1, 2, -1)^T$. Il suffit donc de considérer $W = (1, 2, -1)$ et de normaliser la base orthonormée (U, V, W), ce qui donne bien une base de diagonalisation de A.

Remarque. En utilisant l'exercice II.2, on peut remarquer qu'il y a un moyen plus rapide de trouver une base de diagonalisation de A.

$$\text{Ker}(A - 4I) = \text{Im}(A - I) \text{ et } \text{Ker}(A - I) = \text{Im}(A - 4I).$$

$\text{Ker}(A - 4I) = \text{Im}(A - I)$ étant de dimension 1, il suffit de prendre une colonne non nulle de $A - I$ comme base de $\text{Ker}(A - 4I)$. De même, $\text{Ker}(A - I) = \text{Im}(A - 4I)$ étant de dimension 2, il suffit de prendre deux vecteurs formant une famille libre des colonnes de $A - 4I$ pour voir une base de $\text{Ker}(A - 4I)$. Enfin, il suffit d'orthonormaliser la base qu'on a trouvé de $\text{Ker}(A - I)$, puis normaliser le vecteur formant une base de $\text{Ker}(A - 4I)$, et on obtient une base orthonormée de diagonalisation de A.

Correction de l'exercice II.4 :

A est symétrique et est donc diagonalisable en base orthonormée. Posons donc $A = O\Delta O^T$ avec $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telle que les coefficients diagonaux nuls soient exactement $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$. En appliquant l'inégalité Cauchy-Schwarz à $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ et $(1, \dots, 1)$. On obtient que $\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i\right)^2 \leq r \sum_{1=1}^{r} \lambda_i^2$.

Pour conclure, il suffit de remarquer les points suivants.

→ $r = \operatorname{rg} A$.

→ $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr}(O\Delta O^T) = \operatorname{Tr} \Delta = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i$.

→ $\operatorname{Tr}(A^2) = \operatorname{Tr}(O\Delta^2 O^T) = \operatorname{Tr}(\Delta^2) = \sum_{i=11}^{r} \lambda_i^2$.

Correction de l'exercice II.5 :

On a $(A^T A)^T = A^T A$ et $(AA^T)^T = AA^T$, donc ces deux matrices sont symétriques. De plus, il est facile de voir que pour toutes matrices $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\chi_{M_1 M_2} = \chi_{M_2 M_1}$. On en déduit donc que $\chi_{A^T A} = \chi_{AA^T}$. Ces deux matrices sont symétriques, donc diagonalisables, et alors l'égalité des polynômes caractéristiques nous permet d'affirmer qu'elles ont les mêmes valeurs propres et leurs espaces propres sont de même dimension, et donc finalement que ces matrices sont équivalentes (car équivalentes à une même matrice diagonale).

Correction de l'exercice III.2 :

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de diagonalisation de u telle que pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $u(e_i) = \lambda_i e_i$. Soit $x \in F_\mu \setminus \{0\}$ tel que $\|x\| = 1$ (quitte à diviser par $\|x\|$, par stabilité de F_μ par multiplication par un scalaire). On a d'après la proposition III.1,

$$\lambda_1 \leq \underbrace{\langle u(x),\, x\rangle}_{=\mu\langle x,\, x\rangle = \mu} \leq \lambda_n.$$

On a donc nécessairement $\mu \in [\lambda_1, \lambda_n]$, sinon $F_\mu = \{0\}$ (il est facile de vérifier que $0 \in F_\mu$). De plus, si $\lambda_1 < \mu < \lambda_n$, F_μ n'est pas un espace vectoriel. Supposons que F_μ est un espace vectoriel et considérons l'espace vectoriel $G = F_\mu \cap \operatorname{Vect}(e_1, e_n)$. Soit $s = s_1 e_1 + s_n e_n \in G$. On a

$$\begin{aligned} s \in G &\iff \mu s_1^2 + \mu s_2^2 = \mu \langle s,\, s\rangle = \langle u(x),\, x\rangle = \lambda_1 s_1^2 + \lambda_2 s_2^2 \\ &\iff s_2 = \sqrt{\frac{\lambda_n - \mu}{\mu - \lambda_1}} s_1 \text{ ou } s_2 = -\sqrt{\frac{\lambda_n - \mu}{\mu - \lambda_1}} s_1. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$G = \left\{ s = s_1 e_1 + s_2 e_2 \in E,\ s_2 = \sqrt{\frac{\lambda_n - \mu}{\mu - \lambda_1}} s_1 \right\} \cup \left\{ s = s_1 e_1 + s_2 e_2 \in E,\ s_2 = -\sqrt{\frac{\lambda_n - \mu}{\mu - \lambda_1}} s_1 \right\}.$$

G est donc l'union de deux espaces vectoriels distincts et non inclus l'un dans l'autre, donc G n'est pas un espace vectoriel, ce qui est absurde.
Finalement, regardons le cas où $\mu = \lambda_1$ (le cas où $\mu = \lambda_n$ se traite de la même manière). Supposons que $\mu = \lambda_1$. On a pour tout $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in F_\mu$,

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda_1 \langle x,\, x\rangle = \langle u(x),\, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \ \ i.e. \ \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\lambda_i - \lambda_1) x_i^2}_{\geq 0} = 0.$$

On en déduit donc finalement que pour tout $i \in [\![1; n]\!]$ tel que $\lambda_i \neq \lambda_1$, $x_i = 0$, i.e. $x \in E_{\lambda_1, u}$. Ceci implique que $F_\mu \subset E_{\lambda_1,u}$. L'inclusion réciproque est évidente, ce qui nous donne que F_μ est un espace vectoriel non trivial. On a donc bien montré le résultat voulu.

Annexe

Nous exhibons ici deux méthodes alternatives pour montrer le point 3 du théorème spectral (Théorème II.1). Cette annexe est à but purement culturel. Nous conseillons donc au lecteur de l'aborder uniquement s'il est à l'aise avec les notions du cours et s'il a le temps de le faire.

→ **Méthode alternative 1 (espaces hermitiens) :** En fait, en examinant la preuve de ce résultat fournie, on peut facilement voir que si on exhibe un sous-espace vectoriel F de E de dimension 1 qui est stable par u, alors on pouvait se passer de montrer la propriété pour $n = 2$. Pour ce faire, on va montrer que u admet une valeur propre réelle. On va passer aux matrices. Soit β une base orthonormée de E. On pose $A = [u]_\beta$. On sait que (voir le chapitre 29 sur la réduction) A admet une valeur propre complexe, qu'on note λ. Fixons $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ quelconque tel que $AX = \lambda X$. On a

$$\overline{\lambda}||X||^2 = \overline{\lambda \overline{X^T} X} = \overline{(\overline{X^T} A X)^T} = \overline{X^T}\ \overline{A^T} X = \overline{X^T} A X = \lambda \overline{X^T} X = \lambda ||X||^2.$$

On a donc $\lambda \in \mathbb{R}$. L'idée qui vient à l'esprit consiste à considérer l'espace

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X) = \{\lambda X,\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Cependant, on a à priori $X \in \mathbb{C}^n$, ce qui fait que cet espace n'est pas valable, car F doit être inclus dans $\mathbb{R}^n$. On propose deux manières pour éviter ce problème.

- **Possibilité 1 :** Posons $X = \mathrm{Re}(X) + i\,\mathrm{Im}(X)$ (où $\mathrm{Re}(X)$ et $\mathrm{Im}(X)$ sont respectivement les vecteurs dont les coordonnées sont les parties réelles et imaginaires de celles de X). On a $AX = \lambda X$ et donc

$$\begin{gathered} A\,\mathrm{Re}(X) + iA\,\mathrm{Im}(X) = \lambda\,\mathrm{Re}(X) + i\lambda\,\mathrm{Im}(X) \\ \textit{i.e. } A\,\mathrm{Re}(X) = \lambda\,\mathrm{Re}(X) \text{ et } A\,\mathrm{Im}(X) = \lambda\,\mathrm{Im}(X). \end{gathered}$$

L'un des deux vecteurs $\mathrm{Re}(X)$ ou $\mathrm{Im}(X)$ est non nul, et est donc un vecteur propre de A associé à λ. Il suffit alors de considérer $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Re}(X))$ ou $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(X))$ selon les cas.

- **Possibilité 2 :** Rappelons que le rang d'une matrice réelle est le même sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Plus exactement, on a le lemme suivant.

Lemme III.3.

Si $\mathbb{K}, \mathbb{L}$ sont deux corps tels que $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{rg}_{\mathbb{K}} A = \mathrm{rg}_{\mathbb{L}} A$.

Démonstration. Posons $r = \mathrm{rg}_{\mathbb{K}} A$. A est équivalente à la matrice

$$J_{r,n} = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ fois}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r \text{ fois}}).$$

On peut donc écrire $A = PJ_{r,n}Q$ avec $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Cette écriture reste valable sur $\mathbb{L}$ et donc, sur $\mathbb{L}$, A est toujours équivalente à la matrice $J_{r,n}$. Par conséquent, $rg_{\mathbb{L}} A = r$ □

Grâce à ce lemme, on a $rg_{\mathbb{R}}(A - \lambda I_n) = rg_{\mathbb{C}}(A - \lambda I_n) < n$ et donc λ est bien valeur propre de A, vue comme matrice réelle. On dispose, en particulier, d'un vecteur propre $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ de A associé à λ et $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X)$ convient donc.

→ **Méthode alternative 2 (calcul différentiel et optimisation) :** Cette partie utilise quelques outils du chapitre du calcul différentiel. Le lecteur n'ayant pas encore abordé ce chapitre est encouragé à n'aborder cette méthode seulement après avoir maitrisé le chapitre en question.

Toujours dans le même esprit que la méthode alternative précédente, on expose un autre moyen de montrer que u admet une valeur propre réelle. On se propose de le montrer de manière analytique cette fois. On considère l'application

$$\phi : \begin{cases} E & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \langle x, u(x) \rangle. \end{cases}$$

$\phi \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ (car c'est une application polynomiale) sur le compact $S(0,1) = \{x \in E,\ \|x\| = 1\}$ et donc atteint son maximum en $x_0 \in S(0,1)$.

$S(0,1)$ admettant $x_0 + \mathrm{Vect}(x_0)^\perp$ comme espace tangent (affine) en x_0, on a alors que $\nabla\phi_{x_0}$ est perpendiculaire à $\mathrm{Vect}(x_0)^\perp$ et est donc de la forme $\nabla\phi_{x_0} = \alpha x_0$. Pour finir, remarquons que

$$\phi(x_0 + h) - \phi(x_0) = \langle h, u(x_0) \rangle + \langle x_0, u(h) \rangle + \underbrace{\langle h, u(h) \rangle}_{O(||h||^2)} \underset{u \in S(E)}{=} \langle 2u(x_0), h \rangle + \underbrace{\langle h, u(h) \rangle}_{O(||h||^2)}$$

et que donc $\nabla\phi_{x_0} = 2u(x_0) = \alpha x_0$ d'où x_0 est un vecteur propre de u de valeur propre (réelle) associée $\dfrac{\alpha}{2}$.

* *
*

Document compilé par Omar Bennouna et révisé par Issam Tauil le 07/06/2023 pour cpge-paradise.com.
Si vous repérez une erreur, ou avez des remarques, prière de me contacter via l'adresse contact@cpge-paradise.com.