CHAPITRE 42

Endomorphismes d'un espace hermitien

Dans tout ce chapitre, $(E, \langle \cdot\,,\ \cdot \rangle)$ désigne un espace hermitien de dimension $n \geq 1$.

Exemples

→ Sur $\mathbb{C}^n$: pour tous $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$, $\langle x,\ y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} y_k$.

→ Sur $\mathscr{T}_n$: pour tous $P, Q \in \mathscr{T}_n$, $\langle P,\ Q \rangle = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{P(t)} Q(t) \mathrm{d}t$.

Si, pour tout $k \in [\![-n; n]\!]$, l'application $x \mapsto e^{ikx}$ est notée e_k, rappelons que $\mathscr{T}_n = \mathrm{Vect}(e_{-n}, \dots, e_n)$.

I Adjonction matricielle

Définition I.1.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On appelle *matrice adjointe de* A, et on note A^*, la matrice $\overline{A}^\top$.

Proposition I.2.

Pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

→ $(A + B)^* = A^* + B^*$, $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$, et $(AB)^* = B^* A^*$.

→ $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$, et $\chi_{A^*} = \overline{\chi_A}$

→ $\mathrm{rg}(A^*) = \mathrm{rg}(A)$. En effet $\mathrm{rg}(A^*) = \mathrm{rg}(\overline{A}) = \mathrm{rg}(A)$

Si un polynôme P s'écrit $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $\overline{P} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^k$

Matrices hermitiennes : Une matrice carrée est hermitienne si elle est égale à sa matrice adjointe.

Proposition I.3.

→ L'ensemble des matrices hermitiennes d'ordre n

$$\mathcal{H}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^* = A\}$$

est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n^2.

→ Si $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, alors $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$.

Preuves

→ Soit $A = B + iC \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que B et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \iff A^* = A \iff B^\top = B \quad \text{et} \quad C^\top = -C$$

Donc $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ est isomorphe $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Donc $\dim(\mathcal{H}_n(\mathbb{C})) = \dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{n(n-1)}{2} = n^2$.

→ Si $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, alors $\chi_A = \chi_{A^*} = \overline{\chi_A}$.

Matrices unitaires : Les matrices unitaires sont les matrices de l'ensemble

$$\mathcal{U}_n(\mathbb{C}) = \{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid U^*U = I_n\}$$

Proposition I.4.

→ $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

→ $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C}) \iff$ les colonnes de U forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$
$\iff$ les lignes de U forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$.

→ $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ si, et seulement si, il existe deux bases orthornormée $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E telles que U soit la matrice de la famille $\mathscr{B}'$ relativement à la base $\mathscr{B}$.

Preuve de la deuxième proposition : Soit $U = (u_{k,l})_{1 \le k,l \le n} \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$. Alors pour tous $p, q \in [\![1;n]\!]$, $(U^*U)(p,q) = \sum_{k=1}^{n} \overline{u_{k,p}} u_{k,q}$, donc pour $p \ne q$, $\sum_{k=1}^{n} \overline{u_{k,p}} u_{k,q} = 0$ et pour $p = q$, $\sum_{k=1}^{n} |u_{k,p}|^2 = 1$. Donc, les colonnes de U forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
De même, en examinant les coefficients de UU^*, il vient que les lignes de U forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$. Les réciproques sont immédiates.

Matrices normales Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite normale si $AA^* = A^*A$.

II Adjonction dans $\mathscr{L}(E)$

Théorème - définition II.1.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors, il existe un unique endomorphisme v de E tel que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \langle u(x),\, y\rangle = \langle x,\, v(y)\rangle$$

De plus, la matrice de v relativement à toute base orthonormée $\mathscr{B}$ de E est la matrice adjointe de la matrice de u relativement à la même base $\mathscr{B}$, et v est appelé *endomorphisme adjoint* de u et est noté u^*.

Preuve : Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E, et $A = (a_{k,\ell})_{1 \le k,\ell \le n}$ la matrice de u relativement à $\mathscr{B}$. Posons v tel que sa matrice relativement à $\mathscr{B}$ vaille A^*.
Alors, pour tous $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, $y = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n \in E$,

$$\langle u(x),\, y\rangle = \left\langle \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell u(e_\ell),\, \sum_{\ell=1}^{n} y_\ell e_\ell \right\rangle = \left\langle \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,\ell} e_k\right),\, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{on conserve les termes où } k=j}}{=} \sum_{1 \le \ell,k \le n} \overline{x_\ell a_{k,\ell}} y_k$$

et

$$\langle x,\, v(y)\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} x_j e_j,\, \sum_{\ell=1}^{n} y_\ell \left(\sum_{k=1}^{n} \overline{a_{\ell,k}} e_k\right) \right\rangle = \sum_{1 \le \ell,k \le n} \overline{x_k} y_\ell \overline{a_{\ell,k}} = \langle u(x),\, y\rangle$$

De plus, si un endomorphisme w, de matrice notée $(w_{j,k})_{1 \le j,k \le n}$ relativement à la base $\mathscr{B}$, vérifie la même identité, alors pour tous $j, k \in [\![1;n]\!]$, $w_{j,k} = \langle e_j,\, w(e_k)\rangle = \langle u(e_j),\, e_k\rangle = \overline{a_{k,j}}$, donc $w = v$.

Proposition II.2.

Soit F un sous-espace vectoriel de E, et u un endomorphisme de E.
Si F est stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u^*.

Preuve : Si $y \in F^{\perp}$, alors, pour tout $x \in F$, alors $0 = \langle u(x),\ y\rangle = \langle x,\ u^*(y)\rangle$, donc $u^*(y) \in F^{\perp}$.

Proposition II.3.

Soit u un endomorphisme de E.

1. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   - → u est hermitien *i.e.* $u = u^*$.
   - → Il existe une base orthonormée de E telle que la matrice de u relativement à cette base soit hermitienne.
   - → Pour toute base orthonormée $\mathscr{B}$ de E, la matrice de u relativement à $\mathscr{B}$ est hermitienne.
2. Les trois assertions suivantes sont également équivalentes :
   - → u est unitaire *i.e.* pour tous $x, y \in E$, $\langle u(x),\ u(y)\rangle = \langle x,\ y\rangle$.
   - → Il existe une base orthonormée de E telle que la matrice de u relativement à cette base soit unitaire.
   - → Pour toute base orthonormée $\mathscr{B}$ de E, la matrice de u relativement à $\mathscr{B}$ est unitaire.

Preuves : La première chaîne d'équivalences est immédiate car la matrice de u relativement à une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E (et il en existe) est la matrice adjointe de la matrice de u^* relativement à $\mathscr{B}$.
Pour la deuxième chaîne d'équivalences, il convient de remarquer que u est unitaire si, et seulement si, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle x,\ (u^* \circ u)(y)\rangle = \langle x,\ y\rangle$, donc si, et seulement si, $u^* \circ u = \mathrm{Id}_E$ (car pour tout $x \in E$, $\langle x,\ (u^* \circ u)(x)\rangle = \langle x,\ x\rangle$).

On note $\mathcal{U}(E)$ les endomorphismes unitaires de E.

Exercice II.4.

Soit $(E, \langle\cdot,\ \cdot\rangle)$ un espace hermitien de dimension $n \geq 1$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$. Montrer que $\mathcal{U}(E)$ est compact.

Théorème II.5.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

- → u est normal si, et seulement si, u est diagonalisable dans une base orthonormée de E.
- → u est hermitien si, et seulement si, u est diagonalisable dans une base orthonormée de E et $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}$.
- → u est unitaire si, et seulement si, u est diagonalisable dans une base orthonormée de E et $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{U}$.

Correction de l'exercice II.4. :

Montrons que $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Notons $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour toute $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$, $\|U\| = 1$, donc $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est borné.
De plus, $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en tant qu'image réciproque de $\{0\}$, fermé dans $\mathbb{R}$, par l'application continue $U \mapsto U^*U - I_n$. Donc $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est compact.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Introduisons l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à valeurs dans $\mathscr{L}(E)$

$$\varphi : M = (m_{j,k})_{1 \leq j,k \leq n} \longmapsto \left(x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \longmapsto \sum_{j=1}^{n} x_i \left(\sum_{k=1}^{n} m_{k,j} e_j \right) \right)$$

Cett application est linéaire donc continue car $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie. Il est clair que $\mathcal{U}(E)$ est l'image par φ de $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$, qui est compact, donc $\mathcal{U}(E)$ est compact.

* * *

Compilé par Mehdi Chouta pour CPGE Paradise le 10 février 2021.