Exercices de révision MP : une correction non officielle

Samy Clementz

24/08/2022

1 Nombres complexes

Exercice 1 * Suites arithmético-géométriques

On distingue deux cas.

Premier cas : $a = 1$. Dans ce cas, il s'agit d'une suite arithmétique de raison b et de premier terme x_0, et $x_n = x_0 + nb$.

Deuxième cas : $a \neq 1$. On introduit l tel que $l = al + b$. (donc on pose $l = \frac{b}{1-a}$). Alors pour tout $n \geq 0$ on a

$$x_{n+1} - l = a(x_n - l).$$

Par conséquent la suite $(x_n - l)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de premier terme $x_0 - l$ et de raison a. Par conséquent $x_n - l = (x_0 - l)a^n$ pour tout $n \geq 0$, ce qui donne

$$x_n = (x_0 - l)a^n + l,$$

soit encore

$$x_n = x_0 a^n + b\frac{1 - a^n}{1 - a}.$$

Exercice 2

Montrons la deuxième égalité.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(e^{ix})^k &= (e^{ix} + 1)^n \quad \text{(formule du binôme)} \\
&= \Big(e^{\frac{ix}{2}}(e^{\frac{ix}{2}} + e^{-\frac{ix}{2}})\Big)^n \quad \text{(technique de l'angle moitié)} \\
&= e^{\frac{inx}{2}}(e^{\frac{ix}{2}} + e^{-\frac{ix}{2}})^n \\
&= e^{\frac{inx}{2}} 2^n \Big(\frac{e^{\frac{ix}{2}} + e^{-\frac{ix}{2}}}{2}\Big)^n \\
&= e^{\frac{inx}{2}} 2^n \cos\big(\frac{x}{2}\big)^n.
\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
C(x) &= Re\Big(e^{\frac{inx}{2}} 2^n \cos\big(\frac{x}{2}\big)^n\Big) \\
&= 2^n \cos\big(\frac{nx}{2}\big) \cos\big(\frac{x}{2}\big)^n.
\end{aligned}$$

Montrons la deuxième égalité.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} &= \sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^k \\
&= \begin{cases} n+1 & \text{si} \quad x \in 2\pi\mathbb{Z} \\ \frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1} & \text{si} \quad x \notin 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}
\end{aligned}$$

Si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors

$$\begin{aligned}\frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1} &= \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}}\frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}-e^{-i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}} \quad \text{(technique de l'angle moitié)}\\ &= e^{i\frac{n}{2}x}\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}S(x) &= Im(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx})\\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in 2\pi\mathbb{Z} \\ \sin(\frac{n}{2}x)\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})} & \text{si} \quad x \notin 2\pi\mathbb{Z}\end{cases}\end{aligned}$$

Exercice 3 *

a) On utilisera le résultat suivant. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} \omega^j = \begin{cases} n & \text{si} \quad n \text{ divise } j \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

En effet,

$$\begin{aligned}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} \omega^j &= \sum_{k=0}^{n-1}(e^{i\frac{2k\pi}{n}})^j\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(e^{i\frac{2j\pi}{n}})^k\\ &= \begin{cases} n & \text{si} \quad n \text{ divise } j \\ \frac{e^{i2j\pi}-1}{e^{\frac{i2j\pi}{n}}-1} = 0 & \text{sinon}\end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, si $P = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$, alors

$$\begin{aligned}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} P(\omega) &= \sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j\omega^j\\ &= \sum_{j=0}^{n-1} a_j\Big(\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega^j\Big)\end{aligned}$$

Le seul entier $k \in \{0, \dots, n-1\}$ divisible par n est 0. Donc tous les termes de la dernière somme sont nuls sauf le premier, qui vaut $na_0 = nP(0)$.

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} P(\omega) = nP(0).$$

En divisant par n on trouve le résultat attendu.

b) On en déduit

$$\begin{aligned}|P(0)| &= \frac{1}{n}\left|\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} P(\omega)\right|\\ &\le \frac{1}{n}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}|P(\omega)|\\ &\le \frac{1}{n}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\max\{|P(\omega)|; \omega\in\mathbb{U}_n\}\\ &= \max\{|P(\omega)|; \omega\in\mathbb{U}_n\},\end{aligned}$$

ce qui montre l'inégalité. Pour le cas d'égalité, remarquons que l'égalité est vérifiée si P est constant. Supposons à présent que l'égalité est vérifiée. Par conséquent, la suite d'inégalités ci-dessus est en fait une suite d'égalités. Donc

$$\left|\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} P(\omega)\right| = \sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} |P(\omega)|$$

On est donc dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire. Si $\mathbb{U}_n = \{\omega_0, \dots, \omega_{n-1}\}$, on dispose donc de $i_0 \in \{0, \dots, n-1\}$ et des réels positifs $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ tels que

$$P(\omega_0) = \lambda_0 P(\omega_{i_0}), \dots, P(\omega_{n-1}) = \lambda_{n-1} P(\omega_{i_0}).$$

On peut tout de suite distinguer deux cas. Si $P(\omega_{i_0}) = 0$, alors $P(\omega_i) = 0$ pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$, et donc on a trouvé $n > \deg(P)$ racines distinctes pour P. P est donc nul et a fortiori constant. Sinon, si $P(\omega_{i_0}) \neq 0$, on remarque qu'on a aussi

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} |P(\omega)| = n \max\{|P(\omega)|; \omega \in \mathbb{U}_n\},$$

ce qui implique que les modules des $P(w_i)$ sont égaux. Ainsi

$$\lambda_0 |P(\omega_{i_0})| = \dots = \lambda_{n-1} |P(\omega_{i_0})|.$$

Par conséquent, comme $P(\omega_{i_0}) \neq 0$, les λ_i sont égaux, et en particulier égaux à $\lambda_{i_0} = 1$. Ainsi $\lambda_i = 1$ pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$, et alors

$$P(\omega_0) = \dots = P(\omega_{n-1}).$$

Finalement, le polynôme $Q = P - P(\omega_0)$ admet au moins $n > \deg(Q)$ racines distinctes, et est donc nul. Cela implique que $P = P(\omega_0)$ est un polynôme constant.

EXERCICE 4

a) Posons $Q = \sum_{k=0}^{n-1} X^k \in \mathbb{Q}[X]$. Notons que

$$X^n - 1 = (X - 1)Q.$$

Comme ω est racine de $X^n - 1$, on a l'égalité

$$0 = \omega^n - 1 = (\omega - 1)Q(\omega).$$

Comme $\omega - 1 \neq 0$, on constate que $Q(\omega) = 0$.

b) L'égalité $x = \omega + \frac{1}{\omega}$ est une simple réécriture de $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{-2i\pi}{5}}}{2}$.
On a d'après a)

$$Q(\omega) = 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = 0.$$

Par conséquent en divisant par $\omega^2 \neq 0$

$$\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} + 1 + \omega + \omega^2 = 0.$$

Comme $x^2 = 2 + \omega^2 + \frac{1}{\omega^2}$, cette équation se réécrit

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

x est donc racine de X^2+X-1, dont les racines sont $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Comme x est positif ($0 \leq \frac{2\pi}{5} \leq \frac{\pi}{2}$), x est donc nécessairement égal à $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$.

EXERCICE 5

TODO revoir la rédaction ? Soient a, b, c des complexes. On note A, B, C les points d'affixes a, b, c. On note M_0 le point d'affixe $z_0 := \frac{a+b+c}{3}$.

a, b, c vérifient $a + bj + cj^2 = 0$ si et seulement si il existe $z, \mu \in \mathbb{C}$ tel que

$$(a, b, c) = z(1, 1, 1) + \mu(1, j, j^2),$$

si et seulement si il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que

$$(a, b, c) = (z_0, z_0, z_0) + \mu(1, j, j^2),$$

ce qui est le cas si et seulement si

$$b - z_0 = j(a - z_0), \quad c - z_0 = j^2(a - z_0)$$

si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{M_0B}$ (respectivement $\overrightarrow{M_0C}$) est l'image de $\overrightarrow{M_0A}$ par la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ (respectivement la rotation d'angle $\frac{4\pi}{3}$), ce qui équivaut à dire que A, B, C sont les sommets d'un triangle équilatéral de sens direct.

2 Asymptotique

Exercice 15

Commençons par remarquer

$$\frac{x(x+1)}{1+x^2} = 1 + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x^2}), \quad \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2}).$$

Comme

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2}),$$

on se retrouve avec

$$e^{\frac{1}{x}} - \frac{x(x+1)}{1+x^2} = \frac{3}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2}),$$

ce qui signifie

$$e^{\frac{1}{x}} - \frac{x(x+1)}{1+x^2} \sim \frac{3}{2x^2}$$

Exercice 19

Montrons d'abord que a_n tend vers 1. En effet, la condition $a_n^n \to u$ est équivalente à

$$\exp(n \ln(a_n)) \to u,$$

ce qui implique (par continuité du logarithme en $u \in \mathbb{R}_+^*$)

$$n \ln(a_n) \to \ln(u).$$

Par conséquent

$$\ln(a_n) = \frac{n \ln(a_n)}{n} \to 0,$$

et ainsi $a_n \to 1$ (en composant à gauche par exp qui est continue en 0). De même, $b_n \to 1$. On peut donc écrire $a_n = 1 + \varepsilon_n$ et $b_n = 1 + \varepsilon_n'$, avec ε_n et ε_n' tendant vers 0. Dans la suite on devra préciser la vitesse de convergence de ε_n vers 0. Faisons-le maintenant, en remarquant

$$n \ln(a_n) = n \ln(1 + \varepsilon_n) \sim n\varepsilon_n \to \ln(u),$$

et de la même manière on a $n\varepsilon_n' \to \ln(v)$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)^n &= \left(\frac{2+\varepsilon_n+\varepsilon'_n}{2}\right)^n \\ &= \left(1+\frac{\varepsilon_n+\varepsilon'_n}{2}\right)^n \\ &= \exp\left(n\ln(1+\frac{\varepsilon_n+\varepsilon'_n}{2})\right)\end{aligned}$$

Mais

$$n\ln(1+\frac{\varepsilon_n+\varepsilon'_n}{2}) \sim \frac{n\varepsilon_n+n\varepsilon'_n}{2} \to \frac{1}{2}(\ln(u)+\ln(v)) = \ln(\sqrt{uv}).$$

Donc $\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)^n \to \exp\left(\ln(\sqrt{uv})\right) = \sqrt{uv}$. On a utilisé la continuité de exp en $\ln(\sqrt{uv})$.

3 Suites réelles et complexes

Exercice 23

Déjà en considérant les modules, si z est tel que $|z| < 1$, alors $z^n \to 0$. Si z est tel que $|z| > 1$, alors $(z^n)_{n\geq 0}$ diverge.

Maintenant soit z dans le cercle unité tel que $(z^n)_{n\geq 0}$ converge vers z^*. Alors nécessairement z^* est dans le cercle unité, donc non nul. De plus $z^{n+1} = zz^n$ converge aussi vers z^*, mais aussi vers zz^*. Comme $z^* \neq 0$, $z = 1$.

Donc les $z \in \mathbb{C}$ tels que $(z^n)_{n\geq 0}$ converge sont tous les éléments du disque unité ouvert et 1.

Exercice 24 * Autour du théorème de Cesaro

a) Supposons $x_n \to l$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$ implique $|x_n - l| \leq \varepsilon$. Pour tout $n \geq n_0$ on a

$$\begin{aligned}|y_n - l| &= \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(x_k - l)\right| \\ &\leq \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n_0-1}(x_k-l)\right| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0}^{n}|x_k - l| \\ &\leq \varepsilon + \frac{n-n_0+1}{n+1}\varepsilon \\ &\leq 2\varepsilon,\end{aligned}$$

du moment que $\frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n_0-1}(x_k-l)\right| \leq \varepsilon$, ce qui est vrai à partir d'un certain rang $n_1 \geq n_0$. Par conséquent, pour tout $n \geq n_1$, on a

$$|y_n - l| \leq 2\varepsilon$$

Finalement $y_n \to l$.
Supposons $x_n \to +\infty$. Soit $M > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \geq 3M$ si $n \geq n_0$. Pour tout $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}y_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}x_k \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1}x_k + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0}^{n}x_k \\ &\geq -M + 3M\frac{n-n_0+1}{n+1} \\ &\geq M,\end{aligned}$$

dès que n est assez grand de telle sorte que $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1}x_k \geq -M$ et $3M\frac{n-n_0+1}{n+1} \geq 2M$.

b) Si la moyenne de Césaro $(y_n)_{n\geq 0}$ de $(x_n)_{n\geq 0}$ convergent, alors $(x_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas nécessairement. Par exemple, prendre $x_n = (-1)^n$ qui donne $y_n = \frac{1}{n+1}\frac{1-(-1)^{n+1}}{2} \to 0$.

c) Déjà, on vérifie que $x_{dl+k} = x_k$ pour tout entiers naturels k, l. Ensuite on effectue la division euclidienne de n par d : $n = dq_n + r_n$ avec $0 \leq r_n < d$.

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_k \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{l=0}^{q_n-1}\sum_{k=0}^{d-1} x_{dl+k} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{r_n} x_k \\ &= \frac{q_n}{n+1}\sum_{k=0}^{d-1} x_k + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{r_n} x_k. \end{aligned}$$

Puis

$$\frac{q_n}{n+1} = \frac{n-r_n}{d(n+1)} \to \frac{1}{d},$$

et $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{r_n} x_k \to 0$, puisque

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{r_n} x_k\right| &\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{r_n} |x_k| \\ &\leq \frac{d}{n+1}\max\{|x_k|, 0 \leq k \leq d-1\} \\ &\to 0. \end{aligned}$$

Finalement,

$$y_n \to \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1} x_k.$$

d) On trouve $y_{2k} = \frac{k}{2k+1} \to \frac{1}{2}$ tandis que $y_{2k+1} = -\frac{1}{2}$. La moyenne de Césaro ne converge pas.

e) TODO

EXERCICE 25 * Théorèmes du point fixe attractif, du point répulsif

1. En écrivant la définition de la continuité en a de la fonction $x \in I \mapsto |f'(x)|$ avec $\varepsilon = k - |f'(a)| > 0$, on voit qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a-\alpha, a+\alpha]$

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leq |f'(a)| + k - |f'(a)| \\ &= k. \end{aligned}$$

   Le caractère $k-$lipschitzien de f sur $I \cap [a-\alpha, a+\alpha]$ découle maintenant de l'inégalité des accroissements finis.

2. D'abord, $I \cap [a-\alpha, a+\alpha]$ est stable par f. En effet, si $x \in I \cap [a-\alpha, a+\alpha]$, alors $f(x) \in I$ car on sait déjà que I est stable par f. De plus

$$\begin{aligned} |f(x) - a| &= |f(x) - f(a)| \\ &\leq k|x-a| \leq |x-a|. \end{aligned}$$

   Donc $f(x) \in I \cap [a-\alpha, a+\alpha]$.
   Par conséquent, si $u_0 \in I \cap [a-\alpha, a+\alpha]$, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ associée est à valeurs dans $I \cap [a-\alpha, a+\alpha]$. Avec une récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ on montre

$$|u_n - a| \leq k^n|u_0 - a|.$$

En effet si l'inégalité est vraie au rang n, alors en appliquant l'inégalité des accroissements finis

$$\begin{aligned}|u_{n+1}-a| &= |f(u_n)-f(a)| \\ &\le k|u_n-a| \quad (\text{car } u_n \in I\cap[a-\alpha,a+\alpha]) \\ &\le k^{n+1}|u_0-a|,\end{aligned}$$

ce qui montre en faisant tendre n vers $+\infty$, que $u_n \to a$.

3. Imprécision de l'énoncé ici. u peut tout à fait stationner mais sur un autre point fixe que a. Pour l'autre sens, raisonnons par l'absurde. Supposons que $(u_n)_{n\ge 0}$ converge vers a sans être stationnaire. Alors comme précédemment, il existe $\alpha > 0$ tel que $|f'(x)| > k$ pour tout $x \in I\cap[a-\alpha,a+\alpha]$, pour un certain $k > 1$. Comme $u_n \to a$ on a $u_n \in I\cap[a-\alpha,a+\alpha]$ à partir d'un certain rang. Pour simplifier la rédaction on peut supposer sans aucune perte de généralité que $u_n \in I\cap[a-\alpha,a+\alpha]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a, cette fois par l'égalité des accroissements finis

$$\begin{aligned}|u_n-a| &= |f(u_{n-1})-f(a)| \\ &= |f'(c_n)||u_{n-1}-a| \quad \text{pour un certain } c_n \in]u_{n-1},a[\subset I\cap[a-\alpha,a+\alpha] \\ &\ge k|u_{n-1}-a|\end{aligned}$$

et donc après une récurrence on montre

$$|u_n-a| \ge k^n|u_0-a| > 0$$

L'inégalité est stricte, sinon $u_0 = a$ et alors $(u_n)_{n\ge 0}$ serait stationnaire. Donc $|u_n-a| \to +\infty$. Contradiction.

Exercice 26 * Bolzano-Weierstrass dans $\bar{\mathbb{R}}$

$(x_n)_{n\ge 0}$ est non majorée, il existe donc un entier $\phi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $x_{\phi(0)} \ge 0$. Si l'on suppose maintenant avoir construit des entiers $\phi(0) < \ldots < \phi(n)$ tels que $u_{\phi(k)} \ge k$ pour tout $k \in \{0,\ldots,n\}$, alors, en remarquant que $(u_k)_{k>\phi(n)}$ est non majorée, on voit qu'il existe un entier $\phi(n+1) > \phi(n)$ tel que $u_{\phi(n+1)} \ge n+1$. On construit ainsi une extractrice $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{\phi(n)} \ge n,$$

ce qui implique que $u_{\phi(n)} \to +\infty$.

Exercice 27 * Caractérisation des suites convergentes

a) Si une suite converge alors elle n'admet qu'une seule valeur d'adhérence. Seul l'autre sens requiert le caractère borné la suite. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes bornée. Supposons qu'elle n'admet qu'une valeur d'adhérence l. Remarquons que si la suite converge, alors elle converge nécessairement vers son unique valeur d'adhérence l. Montrons maintenant qu'elle converge vers l.

   Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'elle ne converge pas vers l. Alors on dispose de $\varepsilon > 0$, tel que pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, il existe un entier noté $n_N \ge N$ tel que $|u_{n_N}-l| \ge \varepsilon$. Cette assertion nous permet de construire par récurrence une extractrice $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $|u_{\phi(n)}-l| \ge \varepsilon$ pour tout n. La suite complexe $(u_{\phi(n)})_{n\ge 0}$ est bornée et admet donc une valeur d'adhérence d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass. Cela nous donne une valeur d'adhérence l' de $(u_n)_{n\ge 0}$, distincte de l, puisqu'en passant à la limite dans l'inégalité $|u_{\phi(n)}-l| \ge \varepsilon$ on récupère $|l'-l| \ge \varepsilon$. Contradiction.

b) Le sens $\Rightarrow$ reste vrai car (u_n) converge $\implies$ (u_n) bornée. Le sens $\Leftarrow$ est faux. Considérer la suite $(n(1+(-1)^n))_{n\ge 0}$, possédant 0 pour unique valeur d'adhérence, mais ne convergeant pas.

4 Séries et familles sommables

Exercice 30 *

On pose $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$. Alors $a_n \sim b_n$ mais $\sum a_n$ converge (critère des séries alternées) alors que $\sum b_n$ diverge.

Retenir : le raisonnement « $a_n \sim b_n$ et $\sum a_n$ converge (resp. diverge) DONC $\sum b_n$ converge (resp. diverge) » est FAUX. Il faut s'assurer que a_n, par exemple, est de signe constant à partir d'un certain rang.

Exercice 31 *

TODO

Exercice 32 *

Posons $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ et $v_n = nu_n$. Alors

$$\underbrace{S_{2n} - S_n}_{\to 0} = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq nu_{2n} \geq 0.$$

Donc $v_{2n} = 2nu_{2n} \to 0$. De plus,

$$0 \leq v_{2n+1} = (2n+1)u_{2n+1} \leq 2nu_{2n} + u_{2n} \to 0.$$

Par conséquent $v_n = nu_n \to 0$.

5 Fonctions de variable réelle : continuité

Exercice 36 *

Soit f une telle fonction. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par récurrence on montre que $f(nx) = nf(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$. La relation

$$0 = f(0) = f(nx) + f(-nx)$$

montre que $f(nx) = nf(x)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Si $q \in \mathbb{N}^*$, on a donc pour tout $p \in \mathbb{Z}$

$$f\big(\frac{p}{q}\big) = pf\big(\frac{1}{q}\big).$$

De plus

$$\begin{aligned} f(1) &= f\Big(q\frac{1}{q}\Big) \\ &= qf\big(\frac{1}{q}\big), \end{aligned}$$

donc $f(\frac{1}{q}) = \frac{1}{q}f(1)$. Par conséquent pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$

$$f\big(\frac{p}{q}\big) = \frac{p}{q}f(1),$$

et donc

$$f(x) = xf(1) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{Q}.$$

Finalement, f est continue et coïncide sur la partie dense $\mathbb{Q}$ avec la fonction continue $x \mapsto xf(1)$ définie sur $\mathbb{R}$, donc

$$f(x) = xf(1) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

EXERCICE 37

a) Non, considérer la fonction tangente sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
b) Oui. En effet I est inclus dans un segment (prendre $[\inf I, \sup I]$ si on veut en expliciter un), et f est bornée sur ce segment d'après le théorème des bornes atteintes, donc en particulier f est bornée sur I.

EXERCICE 38

a) On note g la fonction continue $x \mapsto f(x) - x$ sur $[0,1]$. Alors $g(0) \geq 0$ et $g(1) \leq 0$. Comme g est continue sur $[0,1]$, on dispose, grâce au TVI, de $x_0 \in [0,1]$ tel que $g(x) = 0$, ce qui se traduit par $f(x_0) = x_0$.
b) Non, prendre $x \mapsto x + 1$.
c) On note g la fonction continue $x \mapsto f(x) - x$ sur $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - x \\ &= f(x) - kx + (k-1)x. \end{aligned}$$

Comme $f(x) - kx$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et $k - 1 < 0$, on a $g(x) \underset{+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $g(x) \underset{-\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On conclut à l'existence de $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) = 0$ grâce à une variante du TVI.

EXERCICE 39 *

Comme $f(x) \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ on dispose de $x_+ \in \mathbb{R}$ tel que

$$x \geq x_+ \implies f(x) > f(0) + 1.$$

En particulier $x_+ > 0$. De même $f(x) \underset{-\infty}{\longrightarrow} \infty$ donc on dispose de $x_- < 0$ tel que

$$x \leq x_- \implies f(x) \geq f(0) + 1.$$

La fonction f est continue sur le segment $[x_-, x_+]$ donc y est minorée, et elle y atteint son minimum en un certain $x_0 \in [x_-, x_+]$. Comme $[x_-, x_+]$ contient 0, on a que $f(x_0) \leq f(0)$. Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in [x_-, x_+]$, alors $f(x) \geq f(x_0)$ par la définition de x_0. Si $x > x_0$, alors

$$f(x) \geq f(0) + 1 \geq f(0) \geq f(x_0).$$

Le cas $x < x_-$ se traite de la même manière.

EXERCICE 40

a) Si f est strictement monotone alors elle est injective. C'est le sens facile, ne faisant pas appel à la notion de continuité.
Supposons f injective. Prenons x_0, y_0 deux points quelconques de $\mathbb{R}$. Alors $f(x_0) \neq f(y_0)$. Sans perte de généralité, supposons par exemple $f(x_0) < f(y_0)$ et montrons que f est strictement croissante. Soit $x < y \in \mathbb{R}$. On note ψ la fonction $\lambda \mapsto f(\lambda y_0 + (1-\lambda)y) - f(\lambda x_0 + (1-\lambda)x)$ sur $[0,1]$. Alors :
— ψ est continue sur $[0,1]$
— $\psi(1) = f(y_0) - f(x_0) > 0$

— ψ ne s'annule pas sur $[0,1]$. En effet, sinon on aurait un $\lambda \in [0,1]$ tel que

$$\lambda(y_0 - x_0) + (1-\lambda)(y-x) = 0,$$

ce qui implique, comme $y_0 - x_0 > 0$ et $y - x > 0$, que $\lambda = 1 - \lambda = 0$. Impossible.

D'après le TVI

$$\psi(0) = f(y) - f(x) > 0,$$

ce qui conclut.

b) $f \circ f(x) = -x$ est injective, donc f est injective. Elle est de plus continue, donc f est strictement monotone. Cela implique que $f \circ f$ est croissante, ce qui est impossible car $x \mapsto -x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 41

Raisonnons par l'absurde. Supposons que f ne s'annule qu'un nombre fini de fois.

Posons $x_0 = \max\{x \in \mathbb{R}_+ : f(x) = 0\}$. f est continue sur $[0, x_0]$, donc est bornée sur ce segment. Notons m et M deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ sur $[0, x_0]$. Comme $f(x_0) = 0$, on a $m \leq 0$ et $M \geq 0$.

$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est surjective donc il existe un réel $x_m \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x_m) = m - 1 < 0$. Notons que cela implique $x_m > x_0$. De même, il existe un réel $x_M > x_0$ tel que $f(x_M) = M + 1 > 0$.

Puisque f est continue sur le segment $[x_m, x_M]$, f s'y annule. C'est impossible, par la nature maximale de x_0.

Exercice 42

Montrons que $x \mapsto \sin(x^2)$ sur $\mathbb{R}_+$ convient. En effet posons $x_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ et $y_n = \sqrt{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$x_n - y_n \to 0,$$

mais pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sin(x_n^2) - \sin(y_n^2) = 2.$$

Exercice 43 *

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Grâce à l'uniforme continuité de f, on dispose de $\eta > 0$ tel que pour tout $y, y' \in \mathbb{R}_+$

$$|y - y'| \leq \eta \implies |f(y) - f(y')| \leq 1.$$

Posons $n = \lfloor \frac{x}{\eta} \rfloor$. Nous avons la garantie que

$$|x - n\eta| \leq \eta.$$

De plus,

$$f(0) - f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \Big[f(k\eta) - f\big((k+1)\eta\big) \Big] + f(n\eta) - f(x).$$

Cette décomposition nous donne :

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\leq |f(x) - f(0)| + |f(0)| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \Big| f(k\eta) - f\big((k+1)\eta\big) \Big| + |f(n\eta) - f(x)| + |f(0)| \\
&\leq n + 1 + |f(0)| \\
&\leq \frac{1}{\eta} x + 1 + |f(0)|.
\end{aligned}$$

On obtient le résultat avec $A = \frac{1}{\eta}$ et $B = 1 + |f(0)|$.

6 Fonction de variable réelle : dérivabilité

Exercice 45

On note g la fonction $x \in]0,1] \mapsto \frac{f(x)}{x} - f'(0)$. On a donc $g(x) \underset{x \to +0}{\longrightarrow} 0^+$ et $f(x) = xf'(0) + xg(x)$ pour tout $x \in]0,1]$.

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{i=1}^{n} f(\frac{k^2}{n^3}) \\ &= \frac{f'(0)}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} g(\frac{k^2}{n^3}) \frac{k^2}{n^3} \\ &= f'(0) \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} + \sum_{k=1}^{n} g(\frac{k^2}{n^3}) \frac{k^2}{n^3} \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers $\frac{f'(0)}{3}$. Il reste à montrer que le second terme tend vers 0. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que si $x \in]0, \frac{1}{n_0}]$ alors $|g(x)| < \varepsilon$. Pour tout $n \geq n_0$ et $k = 1, \ldots, n$, on a $\frac{k^2}{n^3} \leq \frac{1}{n_0}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n} g(\frac{k^2}{n^3}) \frac{k^2}{n^3} \right| &\leq \frac{\varepsilon}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{n^3} \sum_{k=1}^{n} n^2 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Exercice 46 Donner une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la dérivée ne soit pas continue en 0.

Considérons

$$g : x \in \mathbb{R}^* \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x}),$$

prolongée par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$. Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(0) = 0$ (revenir au taux d'accroissement). De plus pour $x \neq 0$, $g'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, qui ne converge pas en 0.

Exercice 47 * Contrôle des annulations de f à partir de celles de $f^{(n)}$

Si f s'annule en au moins $k \geq n$ points distincts, alors d'après le théorème de Rolle appliqué $k-1$ fois entre k zéros distincts de f, f' s'annule en au moins $k-1$ points distincts. En itérant on trouve que $f^{(n)}$ s'annule en au moins $k-n$ points distincts. Comme $f^{(n)}$ s'annule en exactement p points distincts, on trouve $k - n \leq p$, donc $k \leq n + p$.

Cette borne est optimale. En effet on peut aussi trouver, pour tout entiers p, n, une fonction f s'annulant en exactement $n + p$ points et telle que $f^{(n)}$ s'annule en exactement p points. Pour cela considérer la fonction polynomiale

$$f(x) = \prod_{k=0}^{n+p-1} (x - k).$$

Exercice 48

a) Montrer qu'une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est lipschitzienne si et seulement si sa dérivée est bornée sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que toute application de classe C^1 sur un segment S de $\mathbb{R}$ y est lipschitzienne.

a) Supposons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable lipschitzienne de constante de Lipschitz $k > 0$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \neq x_0$ on a

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq k.$$

En passant à limite en x_0 on trouve $|f'(x_0)| \leq k$. La dérivée de f est donc bornée uniformément par k. Réciproquement si f' est bornée par $k > 0$ on a d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $x < y$

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|,$$

ce qui est précisément la définition du caractère lipschitzien de f.

b) Si f' est continue sur le segment S, alors elle est bornée sur S (théorème des bornes atteintes). En appliquant la réciproque de la question a) on a le résultat.

Exercice 49

f est dérivable en 0 avec $f(0) = 0$ donc le taux d'accroissement $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet une limite finie en 0. Par conséquent, $\frac{f(x)}{x}$ est borné au voisinage de 0. Ainsi, il existe $\kappa > 0$ et $\eta > 0$ tel que si $0 \leq x \leq \eta$ on a

$$|f(x)| \leq \kappa x.$$

De plus, f est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$. Notons M un majorant de $|f|$. Alors pour tout $x \geq \eta$ on a

$$|f(x)| \leq \frac{M}{\eta} x$$

Finalement pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$|f(x)| \leq \left(\kappa + \frac{M}{\eta} \right) x$$

Exercice 50

On fait apparaître le taux d'accroissement. Pour x plus grand qu'un certain $x_0 \in \mathbb{R}^+$ à déterminer plus tard on écrit

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \left(1 - \frac{x_0}{x}\right) + \frac{f(x_0)}{x} \\ &= f'(c_x) \left(1 - \frac{x_0}{x}\right) + \frac{f(x_0)}{x} \end{aligned}$$

avec un certain $c_x \in [x_0, x]$ obtenu par l'égalité des accroissements finis.

Si $\lambda = +\infty$. Soit $M > 0$. On prend $x_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que si $x > x_0$, alors $f'(x) > M$. En particulier pour $x > x_0$ on a $f'(c_x) > M$ et donc

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= f'(c_x) \left(1 - \frac{x_0}{x}\right) + \frac{f(x_0)}{x} \\ &\geq \frac{M}{2} - \frac{M}{4} \\ &\geq \frac{M}{4}, \end{aligned}$$

pour $x > x_0$ assez grand.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. On prend $x_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que si $x > x_0$, alors $|f'(x) - \lambda| < \varepsilon$. En particulier pour $x > x_0$ on a $|f'(c_x) - \lambda| < \varepsilon$ et donc

$$\begin{aligned} |\frac{f(x)}{x} - \lambda| &\leq |f'(c_x) - \lambda||1 - \frac{x_0}{x}| + \frac{|f(x_0) - \lambda x_0|}{|x|} \\ &\leq 2\varepsilon + \varepsilon \\ &= 3\varepsilon, \end{aligned}$$

pour $x > x_0$ assez grand.

Exercice 51

$x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{\sin(x^2)}{x}$ vérifie ces propriétés. Le caractère C^1 est obtenu grâce au théorème de la limite de la dérivée par exemple... Mais on aurait pu éviter de vérifier ça en translatant.

Exercice 52 * Inégalités de convexité

— $x \mapsto e^x$ est dérivable et convexe sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, son graphe est au dessus de sa tangente en 0. Sa tangente en 0 est la droite d'équation $y = x + 1$. Donc $e^x \geq x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
— Pour $y > 0$, on applique l'inégalité précédente à $x = \ln(y)$, ce qui donne $\ln(y) \geq y - 1$.
— $x \mapsto \sin(x)$ est concave et dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Par conséquent elle est en dessous de sa tangente en 0, qui est la droite d'équation $y = x$. Ainsi $\sin(x) \leq x$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. De plus elle est en dessous de ses cordes. Sa corde entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ est la droite d'équation $y = \frac{2}{\pi}x$. Par conséquent $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
— Par concavité de ln

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) &\geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q)\\ &= \ln(a) + \ln(b)\\ &= \ln(ab),\end{aligned}$$

et en composant à gauche par exp, qui est croissante, on trouve l'inégalité souhaitée.
— Par concavité de ln et d'après l'inégalité de Jensen,

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right) &\geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(x_i)\\ &= \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)\\ &= \ln\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}\right),\end{aligned}$$

et en composant à gauche par exp, qui est croissante, on trouve l'inégalité souhaitée.

Exercice 53 Déterminer les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convexes et majorées sur $\mathbb{R}$.

Ce sont les fonctions constantes. Soit f une fonction convexe. Supposons qu'elle ne soit pas constante. Par exemple on a $f(x) < f(y)$ avec $x < y$. Le taux d'accroissement en x, c'est à dire la fonction $t \in \mathbb{R}\backslash\{x\} \mapsto \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$, est croissante. Par conséquent, pour tout $z > y$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x},$$

donc

$$f(z) \geq (z - x)\frac{f(y) - f(x)}{y - x} + f(x) \underset{z \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

f n'est donc pas majorée.

7 Fonctions de variable réelle : classe C^k

Exercice 54 * Une fonction C^∞ non identiquement nulle plate à tout ordre en 0

1. TODO Notons f la fonction de l'énoncé, que l'on prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on montre par récurrence que $f^{(n)}(x) =$

EXERCICE 56 * Les zéros d'ordre fini sont isolés

a) On peut prendre $n = \min\{k \geq 0 : f^{(k)}(a) \neq 0\} \geq 1$. Alors la formule de Taylor-Young à l'ordre n montre que

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n} \to \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \neq 0,$$

ce qui implique que pour x proche de a, $f(x)/(x-a)^n$, donc $f(x)$, ne s'annule pas.

b) Raisonnons par l'absurde. Supposons que f s'annule une infinité de fois sur S. Alors on peut construire une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de zéros de f situés dans S. Le théorème de Bolzano-Weierstrass s'applique : quitte à extraire, on peut la supposer convergente vers un certain $a \in S$. Comme f est continue en a, $f(a) = 0$. Par hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(n_0)}(a) \neq 0$. On applique la question précédente à a : il y a un voisinage autour de a tel que f ne s'annule pas. Or pour n assez grand, a_n appartient à ce voisinage, vu que $a_n \to a$. Contradiction.

EXERCICE 57 * Dérivées en un point et extrema

a) Montrons que $f'(0) = 0$. En effet, pour tout $x > 0$ assez proche de 0,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \leq 0.$$

donc faisant tendre x vers 0 on obtient $f'(0) \leq 0$. De même si $x < 0$ est assez proche de 0,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geq 0.$$

d'où $f'(0) \geq 0$. Finalement $f'(0) = 0$. Pour montrer $f''(0) \leq 0$, la formule de Taylor-Young en 0 donne

$$f(x) = f(0) + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2),$$

d'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^2} = \frac{f''(0)}{2}.$$

La quantité dont on prend la limite est négative pour x assez proche de 0, donc sa limite est négative.

b) La même formule de Taylor-Young donne toujours

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^2} = \frac{f''(0)}{2} < 0$$

Comme la limite de $x \mapsto \frac{f(x)-f(0)}{x^2}$ en 0 est strictement négative, alors $\frac{f(x)-f(0)}{x^2}$ doit être négatif pour x assez proche de 0. Finalement f admet un maximum local (strict) en 0.

EXERCICE 58

Avec la formule de Taylor avec reste intégral pour $n = 1$ on a

$$\ln(1 + x) - x = -x^2 \int_0^1 \frac{1-u}{(1+xu)^2} du,$$

d'où

$$|\ln(1+x)-x| = x^2\int_0^1 \frac{1-u}{(1+xu)^2}du.$$

Pour tout $x \geq -\frac{1}{2}$ et tout $u \in [0,1]$ on a $\frac{1-u}{(1+xu)^2} \leq 1$. Par conséquent pour tout $x \geq -\frac{1}{2}$

$$|\ln(1+x)-x| \leq x^2.$$

EXERCICE 59 * Inégalité de Landau

La formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral pour $n=1$ donne

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \int_x^{x+h} f''(t)(x+h-t)dt.$$

Un changement de variable $t = x+uh$ donne

$$\int_x^{x+h} f''(t)(x+h-t)dt = h^2\int_0^1 f''(x+uh)(1-u)du.$$

Donc

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - h\int_0^1 f''(x+uh)(1-u)du.$$

Maintenant, d'après l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}|f'(x)| &\leq \frac{2M_0}{h} + M_2h\int_0^1(1-u)du\\ &= \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2h}{2}.\end{aligned}$$

En particulier pour $h = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$ on récupère $|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0M_2}$. Cette valeur de h peut être trouvée en étudiant la fonction définie par la majoration trouvée pour $|f'(x)|$, ou bien en disant

$$\frac{2M_0}{h} + \frac{M_2h}{2} = 2\sqrt{M_0M_2} \quad \text{si et seulement si} \quad \left(\sqrt{\frac{2M_0}{h}} - \sqrt{\frac{hM_2}{2}}\right)^2 = 0,$$

si et seulement si $\frac{2M_0}{h} = \frac{hM_2}{2}$. En résolvant en h on trouve bien $h = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$.

8 Intégration et équations différentielles

EXERCICE 63 * Fonctions dont les premiers moments sont nuls

Raisonnons par l'absurde. Supposons que f ne s'annule qu'un nombre de fois inférieur ou égal à n sur $]a,b[$. Notons $(x_1 < \ldots < x_k)$, avec $k \in \{0,\ldots,n\}$ les points où f s'annule en changeant de signe. Alors si on pose $P = (X-x_1)\ldots(X-x_k) \in \mathbb{R}_n[X]$, la fonction $t \mapsto f(t)P(t)$ sur $[a,b]$ garde un signe constant. En effet, les seuls points où cette fonction change éventuellement de signe sont les $x_1,\ldots,x_k$, et pour tout $i \in \{1,\ldots,k\}$ on a au voisinage de x_i

$$fP(t) = \underbrace{f(t)(t-x_i)}_{\text{signe constant}} \underbrace{\prod_{j\neq i}(t-x_j)}_{\text{signe constant}}.$$

Par conséquent fP est une fonction continue sur $[a,b]$ de signe constant et d'intégrale nulle. Grâce à un résultat classique d'intégration, on conclut que fP est identiquement nulle sur $[a,b]$, ce qui implique que f est nulle sur $[a,b]$. Contradiction.

Exercice 68 * Intégrales de Wallis

a)

$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t)dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos(t)\cos^{n+1}(t)dt \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\cos^n(t)dt \quad \text{(après une IPP)} \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2(t))\cos^n(t)dt \\
&= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}.
\end{aligned}$$

En réarrangeant les termes, on trouve

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n.$$

b)

$$W_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2n(2n-2)\dots 2}W_0.$$

On calcule $W_0 = \frac{\pi}{2}$. De plus

$$W_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 3}W_1.$$

On calcule $W_1 = 1$.

c) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, \pi/2]$ on a $\cos^{n+1}(x) \leq \cos^n(x)$, alors en intégrant on a $W_{n+1} \leq W_n$. $(W_n)_{n\geq 0}$ est décroissante. Par conséquent $W_{n+1}/W_n \leq 1$ (grâce à la positivité de W_n...). De plus d'après a) et la décroissance de $(W_n)_{n\geq 0}$

$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \frac{n+1}{n+2}W_n \\
&\leq W_{n+1},
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

Par théorème d'encadrement, $W_{n+1}/W_n \to 1$.

d) En multipliant la relation $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$ donc

$$(n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+1)W_nW_{n+1}.$$

La suite $((n+1)W_nW_{n+1})_{n\geq 0}$ est constante, et chaque terme vaut $W_0W_1 = \pi/2$.

e)

$$\begin{aligned}
W_n &= \frac{(n+1)W_nW_{n+1}}{(n+1)W_{n+1}} \\
&\sim \frac{\pi}{2nW_n},
\end{aligned}$$

donc

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Exercice 70 *

Pour tout $x \in [a,b]$, on a $f(x) \leq M$, donc $f(x)^p \leq M^p$. Ainsi,

$$\int_a^b f(x)^p dx \leq (b-a)M^p,$$

et donc

$$\left(\int_a^b f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq (b-a)^{\frac{1}{p}} M.$$

Pour la minoration, prenons $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = M$. Soit $\varepsilon \in]0, 2M[$. Il existe $\eta > 0$ tel que $f(x) \geq M - \frac{\varepsilon}{2}$ si $x \in I = [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \cap [a,b]$. Pour $x \in I$, on a $f(x)^p \geq (M - \frac{\varepsilon}{2})^p$, donc

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\geq \left(\int_I f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq |I|^{\frac{1}{p}}(M - \frac{\varepsilon}{2}) \\ &\geq M - \varepsilon \quad \text{(pour } p \text{ assez grand)}\end{aligned}$$

De même, pour p assez grand, $(b-a)^{\frac{1}{p}} M \leq M + \varepsilon$, ce qui conclut.

Exercice 71

Si f est en escalier sur $[a,b]$, alors il existe une subdivision $a = \alpha_1 < \ldots < \alpha_n = b$ telle que f vaut une constante $c_i \in \mathbb{C}$ sur $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Par conséquent

$$\int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} e^{i\lambda t} dt,$$

et pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} e^{i\lambda t} dt = \frac{e^{i\lambda\alpha_{i+1}} - e^{i\lambda\alpha_i}}{i\lambda} \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc

$$\int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Soit maintenant f continue par morceaux sur $[a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe une fonction g en escalier telle que $\|f - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Donc

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt\right| &= \left|\int_a^b (f(t) - g(t)) e^{i\lambda t} dt + \int_a^b g(t) e^{i\lambda t} dt\right| \\ &\leq \int_a^b |f(t) - g(t)| dt + \left|\int_a^b g(t) e^{i\lambda t} dt\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{(pour } \lambda \text{ assez grand)} \\ &= \varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui montre que $\int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

9 Polynômes et fractions rationnelles

EXERCICE 79

a) * Soit z racine de $X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_k X^i$. Montrons que $|z| \leq \max\left\{1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right\}$. Si $|z| \leq 1$ alors l'inégalité est vraie. Sinon, si $|z| > 1$, alors $|z|^i \leq |z|^n$ si $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. z est racine, donc

$$z^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i,$$

ce qui implique

$$|z|^n \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i||z|^i \leq |z|^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|.$$

Ainsi

$$|z| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|.$$

b) TODO

EXERCICE 80 * Polynômes de Tchébychev

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\cos(nx) &= Re\,(\cos(x) + i\sin(x))^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} Re(i^k) \sin^k(x) \cos^{n-k}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k \sin^{2k}(x) \cos^{n-2k}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (1 - \cos^2(x))^k \cos^{n-2k}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (\cos^2(x) - 1)^k \cos^{n-2k}(x),
\end{aligned}$$

et donc en posant

$$T_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{n-2k},$$

on a bien $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$. Pour l'unicité, suffit de voir que si Q est un autre polynôme tel que $Q(\cos(x)) = \cos(nx)$, alors T_n et Q coïncident sur la partie infinie $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, donc $T_n = Q$.

b)

$$\begin{aligned}
T_{n+2}(\cos(x)) &= \cos((n+1)x + x) \\
&= \cos((n+1)x)\cos(x) - \sin((n+1)x)\sin(x)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
T_n(\cos(x)) &= \cos(nx) \\
&= \cos((n+1)x - x) \\
&= \cos((n+1)x)\cos(x) + \sin((n+1)x)\sin(x),
\end{aligned}$$

donc

$$T_{n+2}(\cos(x)) + T_n(\cos(x)) = \cos(x)T_{n+1}(\cos(x))$$

Par conséquent le polynôme $T_{n+2} + T_n$ coïncide avec le polynôme XT_{n+1} sur la partie infinie $[-1, 1]$, donc sont égaux.

c) Avec la relation $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ et les égalités $T_0 = 1, T_2 = X$, on a aisément par récurrence $\deg(T_n) = n$ et le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} pour $n \geq 1$, et 1 pour $n = 0$.

d) Pour $n \geq 1$, la relation $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ montre que les réels de la forme

$$x_k = \frac{\pi(2k+1)}{2n}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

vérifient $T_n(\cos(x_k)) = 0$. Ainsi les $\{\cos(x_k), k \in \mathbb{Z}\}$ sont des racines de T_n. En fait, la famille $\{\cos(x_k), 0 \leq k \leq n-1\}$ est une famille de $n = \deg(T_n)$ racines distinctes de T_n (elles sont distinctes car cos est injective sur $[0, \pi]$). On a donc trouvé toutes les racines de T_n.

e) Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |T_n(\cos(x))| = 1 &\Leftrightarrow |\cos(nx)| = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ainsi les x dans [-1,1] vérifiant $|T_n(x)| = 1$ sont exactement les $\{\cos(\frac{k\pi}{n}), k \in \mathbb{Z}\}$, c'est-à-dire en fait les $n+1$ réels distincts $\{\cos(\frac{k\pi}{n}), 0 \leq k \leq n\}$.

f) En dérivant deux fois la relation $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ sur $\mathbb{R}$ on récupère

$$(1 - \cos^2 x)T_n''(\cos x) - \cos x T_n'(\cos x) + n^2 T_n(\cos x) = 0,$$

ainsi le polynôme $(1 - X^2)T_n'' - XT_n' + n^2 T_n$ s'annule sur $[-1, 1]$, c'est donc le polynôme nul. L'équation différentielle s'écrit finalement

$$(1 - x^2)T_n'' - xT_n' + n^2 T_n = 0.$$

EXERCICE 83 Dérivée d'un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$

a) * Si $\deg(P) = n$, alors le théorème de Rolle nous donne $n - 1 = \deg(P')$ racines distinctes pour P', donc P' est simplement scindé.

b) * Si P a m racines distinctes, chacune de multiplicité $(m_k)_{1 \leq k \leq m}$, alors P' admet m racines distinctes avec multiplicité $(m_k - 1)_{1 \leq k \leq m}$. De plus avec le théorème de Rolle on récupère $m - 1$ racines distinctes. On a donc pour P' trouvé un total de $m - 1 + \sum_{k=1}^{m}(m_k - 1) = m - 1 + \deg(P) - m = \deg(P) - 1 = \deg(P')$ racines comptées avec multiplicité. Donc P' est scindé.

c) TODO

d) TODO

EXERCICE 84 *

a) Si $P = X^2 + bX + c$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, alors $\Delta = b^2 - 4c < 0$. En complétant le carré on a

$$P = \Big(X + \frac{b}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\Big)^2.$$

b) Si $P = A^2 + B^2$ et $Q = C^2 + D^2$ alors

$$PQ = (AC - BD)^2 + (BC + AD)^2.$$

On peut retrouver cette formule en s'inspirant du cas où on manipule des nombres réel, pour lequel on a la petite astuce consistant à passer aux complexes. Si $x = a^2 + b^2$ et $y = c^2 + d^2$, alors $x = |a + ib|^2$ et $y = |c + id|^2$, puis écrire

$$\begin{aligned} xy &= |(a + ib)(c + id)|^2 \\ &= |ac - bd + i(bc + ad)|^2 \\ &= (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2. \end{aligned}$$

c) Il suffit de vérifier que dans la décomposition de P en facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, il n'y a pas de facteurs du type $(X-\alpha)^k$ avec $k \in \mathbb{N}$ impair. Si c'était le cas, P changerait de signe au voisinage de α.

EXERCICE 88 * Dérivée logarithmique

Décomposons P en éléments irréductibles :

$$P = \prod_{k=1}^{n_0} (X-\alpha_k)^{m_k},$$

où les α_k sont les racines deux à deux distinctes de P, et m_k leur multiplicité. Alors, par récurrence sur le nombre de facteurs n_0

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n_0} \frac{m_k}{X-z_k}$$

On retrouve cette formule en dérivant très formellement et sans aucune once de rigueur le logarithme de P.

EXERCICE 89 * Théorème de Gauss-Lucas

On décompose $P = \prod_{k=1}^{n_0} (X-z_k)^{m_k}$.

Soit z une racine de P'. Si z est aussi racine de P, alors le résultat est clair. Sinon,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{P'}{P}(z) \\ &= \sum_{k=1}^{n_0} \frac{m_k}{z-z_k} \end{aligned}$$

Dans chaque terme de la somme, on fait apparaître les complexes conjugués pour récupérer z au numérateur :

$$0 = \sum_{k=1}^{n_0} m_k \frac{\overline{z-z_k}}{|z-z_k|^2},$$

ce qui revient à (en isolant $\bar{z}$ puis repasser au conjugué)

$$z = \sum_{k=1}^{n_0} p_k z_k,$$

où $p_k = \frac{a_k}{\sum_{j=1}^{n_0} a_j}$, avec $a_k = \frac{m_k}{|z-z_k|^2}$, pour $k \in \{1, \ldots, n_0\}$. On vérifie que les p_k sont positifs et somment à 1.

10 Algèbre linéaire : point de vue géométrique

EXERCICE 91

a) Si $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ et $\lambda_1 x^{\alpha_1} + \ldots + \lambda_n x^{\alpha_n} = 0$ avec $\lambda_n \neq 0$, alors $\lambda_n x^{\alpha_n} \sim 0$ quand $x \to +\infty$, ce qui est impossible. Donc $\lambda_n = 0$. On conclut avec une récurrence.

b) Si $k_1 < \ldots < k_n$ et $\lambda_1 \sin(x^{k_1}) + \ldots + \lambda_n \sin(x^{k_n}) = 0$ avec $\lambda_1 \neq 0$, alors $\lambda_1 \sin(x^{k_1}) \sim 0$ quand $x \to 0^+$, ce qui est impossible. Donc $\lambda_1 = 0$. On conclut avec une récurrence.

c) On note D l'application linéaire $f \mapsto f'$ sur $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{C})$ vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Alors la famille de fonctions $(x \mapsto e^{\lambda x})_{\lambda \in \mathbb{C}}$ définies sur $[0,1]$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes de D. Par conséquent (rappeler pourquoi !), cette famille est libre.

Exercice 92 *Condition suffisante d'intersection non nulle

D'après la formule de Grassmann

$$\begin{aligned}\dim(F \cap G) &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cup G)\\ &\geq \dim(F) + \dim(G) - \dim(E)\\ &> 0.\end{aligned}$$

et donc $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 93 * Dimension d'une intersection finie d'hyperplans

On rappelle qu'un hyperplan est par définition le noyau d'une forme linéaire non nulle. Nous disposons donc de m formes linéaires non nulles $\phi_1, \dots, \phi_m$ dont les noyaux respectifs sont $H_1, \dots, H_m$. Posons ψ l'application linéaire $x \in E \mapsto \big(\phi_1(x), \dots, \phi_m(x)\big) \in \mathbb{K}^m$. Alors $Ker(\psi) = \bigcap_{i=1}^m H_i$ et d'après le théorème du rang

$$\dim\Big(\bigcap_{i=1}^m H_i\Big) = n - \dim\big(Im(\psi)\big) \geq n - m,$$

puisque $Im(\psi) \subset \mathbb{K}^m$.

Exercice 94

1. On prend la famille des $n+1$ polynômes de Lagrange associés à n'importe quelle famille de $n+1$ réels distincts.
2. TODO

Exercice 95 * Changement du corps de base

Considérons l'application $\mathbb{R}$-linéaire définie par

$$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto (Re(M), Im(M)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

C'est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, donc conserve la dimension. Par conséquent

$$\dim_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\right) = 2n^2.$$

Exercice 96 * Suites récurrentes

Appelons S ce sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors l'application linéaire

$$(u_n)_{n\geq 0} \in S \mapsto (u_0, \dots, u_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$$

est un isomorphisme. Donc $\dim(S) = p$.

Exercice 97 * Polynômes s'annulant sur un ensemble donné

On note S ce sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$. Alors S est le noyau de l'application linéaire

$$P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_p)) \in \mathbb{R}^p.$$

Cette application linéaire est surjective, car les polynômes de Lagrange associés aux réels $(a_1, \dots, a_p)$ sont envoyés sur la base canonique de $\mathbb{R}^p$. D'après le théorème du rang

$$\dim(S) = n + 1 - p.$$

EXERCICE 100 * Propriétés élémentaires du rang

Pour la première inégalité, $Im(u \circ v) \subset Im(u)$, donc $rg(u \circ v) \leq rg(u)$. De plus $Im(u \circ v) = Im(u_{Im(v)})$. D'après le théorème du rang, $rg(u_{Im(v)}) \leq \dim(Im(v)) = rg(v)$.

Pour la seconde égalité simplement constater que $Im(u + v) \subset Im(u) + Im(v)$, donc

$$\dim(Im(u + v)) \leq \dim(Im(u) + Im(v)) \leq \dim(Im(u)) + \dim(Im(v)),$$

où la dernière inégalité découle par exemple de la formule de Grassmann.

EXERCICE 102 * Rang d'une composée

Le théorème du rang appliqué à

$$g_{Im_{(f)}} : Im_{(f)} \longrightarrow Im(g \circ f)$$

donne

$$rg(g_{Im_{(f)}}) + \dim Ker(g_{Im_{(f)}}) = \dim(Im_{(f)}) = rg(f).$$

Reste à se convaincre que $Im(g_{Im_{(f)}}) = Im(g \circ f)$ pour l'égalité des rangs, et que $Ker(g_{Im_{(f)}}) = Ker(g) \cap Im(f)$.

EXERCICE 103 * Caractérisation des homothéties

Pour $x \neq 0$, on sait qu'il existe $(\lambda, \mu) \neq (0, 0) \in \mathbb{K}^2$ tels que $\lambda x + \mu f(x) = 0$. Forcément $\mu \neq 0$ sinon l'égalité $\lambda x = 0$ impliquerait $\lambda = 0$, donc $(\lambda, \mu) = (0, 0)$. Ainsi pour tout $x \neq 0$, il existe un unique scalaire $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$. Soit $(x, y) \in (\mathbb{E}^*)^2$ des vecteurs non nuls. Montrons que $\lambda_x = \lambda_y$.

Supposons d'abord la famille (x, y) libre. Alors $f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$, donc

$$(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0.$$

La liberté de la famille (x, y) donne $\lambda_{x+y} - \lambda_x = \lambda_{x+y} - \lambda_y = 0$ d'où $\lambda_x = \lambda_y$.

Supposons maintenant la famille (x, y) liée. Il existe $\mu \in \mathbb{K}^*$ unique tel que $y = \mu x$. Alors $f(y) = \lambda_y y = \lambda_y \mu x = \mu f(x) = \mu \lambda_x x$. D'où, puisque $\mu \neq 0$, $\lambda_y x = \lambda_x x$. Par conséquent, puisque $x \neq 0$, on a $\lambda_x = \lambda_y$.

Finalement il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in E$, on a $f(x) = \lambda x$. f est donc une homothétie.

EXERCICE 104 * Indice de nilpotence

Si $\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i f^i(x) = 0$, alors

$$f^{p-1}\Big(\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i f^i(x) = 0\Big) = \lambda_1 f^{p-1}(x),$$

donc $\lambda_1 = 0$. En recomposant par $f^{p-2}, f^{p-3}, \ldots$ on trouve $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{p-1} = 0$.

Si p est l'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent, alors il existe $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$. Par conséquent on peut appliquer le raisonnement ci-dessus, on se retrouve avec une famille libre $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ de E à p éléments, donc $p \leq n$.

EXERCICE 105 * Noyaux et images itérés

1. Soit $k \geq m+1$. Seul montrer $\subset$ nécessite du travail. Soit $x \in Ker(u^k)$.
$$0 = u^k(x) = u^{m+1}(u^{k-(m+1)}(x)).$$
Par conséquent $u^{k-(m+1)}(x) \in Ker(u^{m+1}) = Ker(u^m)$. Ainsi
$$0 = u^m(u^{k-(m+1)}(x)) = u^{k-1}(x),$$
et donc $x \in Ker(u^{k-1})$. Ce raisonnement permet d'amorcer une récurrence descendante.
2. Si $x \in Ker(u^p) \cap Im(u^p)$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = u^p(y)$. De plus $0 = u^p(x) = u^{2p}(y)$, donc $y \in Ker(u^{2p}) = Ker(u^p)$. Par conséquent $x = u^p(y) = 0$. Finalement $Ker(u^p) \cap Im(u^p) = \{0\}$.
De plus, d'après le théorème du rang, $\dim Ker(u^p) + \dim Im(u^p) = n$, ce qui implique que $Ker(u^p)$ et $Im(u^p)$ sont supplémentaires dans E.

11 Matrices

Exercice 106 * Application du calcul sur les matrices élémentaires

a) Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
$E_{k,l}$ envoie e_l sur e_k et annule les autres vecteurs de la base canonique. Par conséquent, si $j \neq k$, alors $E_{i,j}E_{k,l} = 0$ (car alors $E_{i,j}E_{k,l} = 0$ annule tous les vecteurs de la base canonique). Enfin, $E_{i,k}E_{k,l}$ envoie e_l sur e_i et annule les autres vecteurs de la base canonique, donc $E_{i,k}E_{k,l} = E_{i,l}$.

b) Si M commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors pour tout $1 \leq i, j \leq n$ on a $(ME_{i,j})_{i,j} = (E_{i,j}M)_{i,j}$ ce qui donne $M_{i,i} = M_{j,j}$. Par conséquent M ne varie pas sur la diagonale. De plus, pour $k \neq j$, $(ME_{1,j})_{1,k} = (E_{1,j}M)_{1,k}$ donne $0 = M_{j,k}$, donc M est nulle en dehors de la diagonale. Par conséquent, M est multiple de l'identité.
Réciproquement, il est clair que les multiples de l'identité commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

c) Pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$
$$\begin{aligned} f(E_{i,i}) &= f(E_{i,1}E_{1,i}) \\ &= f(E_{1,i}E_{i,1}) \\ &= f(E_{1,1}), \end{aligned}$$
et pour tout $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$
$$\begin{aligned} f(E_{i,j}) &= f(E_{i,i}E_{i,j}) \\ &= f(E_{i,j}E_{i,i}) \\ &= f(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$
Par conséquent pour tout $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on a
$$\begin{aligned} f(M) &= f\left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} M_{i,j}E_{i,j}\right) \\ &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} M_{i,j}f(E_{i,j}) \\ &= f(E_{1,1})\sum_{i=1}^{n} M_{i,i} \\ &= f(E_{1,1})Tr(M). \end{aligned}$$
f est donc proportionnelle à la trace.

Exercice 107 * Interpolation de Lagrange et Vandermonde

1. Notons ψ cette application linéaire. Elle est injective car son noyau est trivial. En effet si P est dans son noyau, alors P admet $n > \deg P$ racines distinctes, donc P est nulle. ψ est une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension n, c'est un isomorphisme.
2. Le caractère bijectif de ψ se traduit par le fait qu'un polynôme de degré $\leq n-1$ est entièrement déterminé par ses évaluations en les n points distincts $(a_1,\dots,a_n)$. La famille de polynômes de Lagrange $(L_1,\dots,L_n)$ est l'image réciproque de la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Enfin, pour tout $n-$uplet de complexes $(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{C}^n$, l'unique polynôme de degré $\leq n-1$ tel que $P(a_k)=b_k$ pour tout $k=1,\dots,n$ est $\psi^{-1}(b_1,\dots,b_n)$.
3. La matrice de Vandermonde associé aux $(a_1,\dots,a_n)$ est la matrice de ψ dans la base canonique de $\mathbb{K}^{n-1}$. On a vu que ψ est inversible, donc la matrice de Vandermonde est aussi inversible.

Exercice 108 * Un calcul de dimension

Posons $n=\dim(E)$, $p=\dim(F)$ et $q=\dim(G)$. Prenons une base $(f_1,\dots,f_q)$ de F que l'on complète en une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ de E. De même prenons une base $(g_1,\dots,g_p)$ de G que l'on complète en base $\mathcal{B}'=(g_1,\dots,g_n)$ de E. Via l'isomorphisme $u\in\mathcal{L}(E)\mapsto[u]_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on voit que $A_{F,G}$ est isomorphe au sous-espace vectoriel des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,q} & C \end{pmatrix}$$

avec $A\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), B\in\mathcal{M}_{p,n-q}(\mathbb{K})$ et $C\in\mathcal{M}_{n-p,n-q}(\mathbb{K})$ quelconques. Ce sous-espace est de dimension $n^2-(n-p)q$.

Exercice 109 * L'application $u\mapsto b\circ u\circ a$

a) Interprétation géométrique :

$$u\in Ker(\Phi)\Longleftrightarrow u(Im(a))\subset Ker(b).$$

$Im(a)$ est de dimension r et d'après le théorème du rang $Ker(b)$ est de dimension $n-s$. Par conséquent, d'après l'exercice précédent, le noyau de Φ est de dimension n^2-sr.

b) D'après le théorème du rang appliqué à Φ

$$rg(\Phi)=sr.$$

c) Notons S l'ensemble des endomorphismes de E dont le noyau contient celui de a et dont l'image est contenue dans celle de b. Alors il est clair que $Im(\Phi)\subset S$. Pour montrer l'égalité, il suffit de montrer que $\dim(S)=sr$. Pour cela prenons $(e_1,\dots,e_{n-r})$ une base de $Ker(a)$ que l'on complète en base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ de E, et $(f_1,\dots,f_r)$ une base de $Im(b)$ que l'on complète en base $\mathcal{B}'=(f_1,\dots,f_n)$ de E. Alors, via l'isomorphisme $u\in\mathcal{L}(E)\mapsto[u]_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on constate que S est isomorphe à l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $A\in\mathcal{M}_{s,r}(\mathbb{K})$ quelconque. Ce sous-espace est de dimension sr.

Exercice 110 * Similitude et équivalence

a) On prend $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ par exemple pour s'assurer que $1\neq 2$, et on considère I_n et $2I_n$, toutes de rang n donc équivalentes, mais pas semblables. (vérifier que la seule matrice semblable à I_n est I_n)

b) Toutes les matrices non inversibles sont équivalentes à une matrice nilpotente. En effet, si M est équivalente à une matrice nilpotente N, alors M et N ont même rang. Il suffit maintenant de montrer que pour tout entier $r = 0, \dots, n-1$ il existe une matrice nilpotente de rang r. En effet pour l'existence il suffit de prendre la matrice avec r "1" sur les premiers éléments de la sur-diagonale, et des 0 ailleurs.

Exercice 111 * Lemme d'Hadamard sur les matrices à diagonale strictement dominante

Raisonnons par l'absurde. Supposons M non inversible. Il existe $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}$ tel que $MX = 0$. Notons $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|x_{i_0}| > 0$ soit maximal. Alors en considérant la i_0-ème ligne de la relation $MX = 0$ on a

$$m_{i_0,i_0} x_{i_0} = -\sum_{k=1, k\neq i_0}^{n} m_{i_0,k} x_k,$$

et donc en appliquant l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |m_{i_0,i_0}||x_{i_0}| &\leq \sum_{k=1,k\neq i_0}^{n} |m_{i_0,k}||x_k| \\ &\leq |x_{i_0}| \sum_{k=1,k\neq i_0}^{n} |m_{i_0,k}|, \end{aligned}$$

puis en divisant par $|x_{i_0}| \neq 0$

$$|m_{i_0,i_0}| \leq \sum_{k=1,k\neq i_0}^{n} |m_{i_0,k}|,$$

en contradiction avec l'hypothèse de l'énoncé.

Exercice 112 * Génération du groupe spécial linéaire

On va montrer un résultat un peu plus fort. Montrons que pour toute matrice A de $GL_n(\mathbb{K})$, on peut trouver des matrices de transvection $U_1, \dots, U_p$ et $V_1, \dots, V_q$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $U_1, \dots, U_p A V_1, \dots, V_q = Diag(1, \dots, 1, \det(A))$. En appliquant ce résultat à une matrice de $SL_n(\mathbb{K})$ on aura que $A = U_p^{-1} \dots U_1^{-1} V_q^{-1} \dots V_1^{-1}$ qui est bien un produit de matrices de transvections.

Le problème se reformule comme ceci : étant donné une matrice A inversible, peut-on, en ne faisant que des opérations du type $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ où $i \neq j$, trouver une matrice diagonale de la forme $Diag(1, \dots, 1, \alpha)$ (si un tel α existe, α sera nécessairement $\det(A)$) ?

Soit donc A une matrice inversible dans $GL_n(\mathbb{K})$. Si $n = 1$ alors c'est bon. Supposons $n \geq 1$. La première colonne de A est non nulle (sinon A ne serait pas inversible), donc contient forcément un élément non nul. Premier cas : $A_{1,1} = 0$ et $A_{j,1} \neq 0$ pour un certain $j \neq 1$. Alors on effectue $L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{A_{j,1}} L_j$ pour se retrouver avec le premier coefficient de la première colonne égal à 1. Second cas : $A_{1,1} \neq 0$. Alors on effectue $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1-A_{2,1}}{A_{1,1}} L_1$ pour avoir que le coefficient $(2,1)$ soit égal à 1 (avoir un coefficient non nul aurait été en fait tout autant satisfaisant pour la suite), puis $L_1 \leftarrow L_1 + (1 - A_{1,1}) L_2$ pour avoir le coefficient $(1,1)$ égal à 1. En utilisant le pivot qui est le coefficient en $(1,1)$, on annule tous les coefficients $(i,1)$ et $(1,i)$ pour $i \in \{2, \dots, n\}$. On se retrouve finalement avec des matrices de transvection $M_1, \dots, M_r$ et $N_1, \dots, N_s$ avec $r, s \in \mathbb{N}$

$$M_1 \dots M_r A N_1 \dots N_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix},$$

pour une matrice inversible $A_1 \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$. En répétant l'opération sur la matrice A_1 inversible (car de déterminant égal à celui de A par exemple) et ainsi de suite, on trouve le résultat souhaité.

Exercice 114 *

On suppose $n \geq 2$. Notons f l'endomorphisme canoniquement associé à M. Alors, f n'étant pas une homothétie, il existe d'après l'exercice 103 un certain $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $(x, f(x))$ est libre. On peut compléter $(x, f(x))$ en une $\mathcal{B} = (x, f(x), e_3, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$. Alors la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, dont M est semblable, a pour première colonne C.

Exercice 115

Le sens $\Rightarrow$ est facile.

Pour le sens $\Leftarrow$, notons f l'endomorphisme canoniquement associé à M et montrons $Im(f) \oplus Ker(f) = \mathbb{K}^n$. En effet d'après le théorème du rang on a bien $\dim(Im(f)) + \dim Ker(f) = n$, et si $x \in Im(f) \cap Ker(f)$, alors $x = f(y)$ pour un certain $y \in \mathbb{K}^n$ et $0 = f(x) = f^2(y) = f(y)$. Donc $x = 0$.

Si on prend maintenant une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ adaptée à la décomposition $Im(f) \oplus Ker(f) = \mathbb{K}^n$, on a que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est J_r.

Exercice 116

$\Rightarrow$ On prend une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ adaptée à la décomposition $Im(u) \oplus Ker(f) = E$. Comme $Im(u)$ est stable par u, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K}),$$

où A est la matrice de $u_{Im(u)}$ dans la base $(e_1, \ldots, e_r)$ de $Im(u)$. Comme $u_{Im(u)}$ est un automorphisme (suffit de montrer l'injectivité et $Ker(u_{Im(u)}) = Ker(u) \cap Im(u) = \{0_E\}$), on a qu'en fait $A \in GL_r(\mathbb{K})$.

$\Leftarrow$ On note $(e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ la base considérée. D'abord on voit que $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ est une famille libre de $Ker(u)$ de dimension $n - r = \dim Ker(u)$. C'est donc une base de $Ker(u)$.

De plus, d'après la forme de la matrice donnée par l'énoncé, $Vect(e_1, \ldots, e_r)$ est stable par u. On a aussi que $u_{Vect(e_1,\ldots,e_r)} \in \mathcal{L}(Vect(e_1, \ldots, e_r))$ est un automorphisme, vu que la matrice A de $u_{Vect(e_1,\ldots,e_r)}$ dans la base $(e_1, \ldots, e_r)$ de $Vect(e_1, \ldots, e_r)$ est inversible. Comme l'image d'une base par un automorphisme est une base, la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ est une base de $Vect(e_1, \ldots, e_r)$. Par conséquent, $e_i \in Im(u)$ pour tout $i = 1, \ldots, r$. Ainsi $(e_1, \ldots, e_r)$ est une famille libre de $Im(u)$ possédant $r = \dim Im(u)$ éléments, c'est donc une base de $Im(u)$.

Finalement, la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E obtenu par la concaténation d'une base de $Im(u)$ et d'une base de $Ker(u)$. $Im(u)$ et $Ker(u)$ sont donc supplémentaire dans E.

Exercice 117 * Nilpotents d'indice maximal

Si M est semblable à N alors M est nilpotente d'indice n.

Si $n = 1$, alors $M = 0$ et l'assertion est vraie. Si M est nilpotente d'indice $n \geq 2$ alors en considérant $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $M^{n-1}x \neq 0$ et en appliquant l'exercice 104 à l'endomorphisme f canoniquement associé à M, on récupère une famille libre $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ de cardinal n, c'est donc une base de $\mathbb{K}^n$. M est semblable à la matrice de f dans la base $(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \ldots, x)$, qui est N.

Exercice 119

J est de rang 1 donc la dimension de son noyau est $n - 1$. On prend $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de $Ker(J)$. On pose $e_n = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$. Montrons que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Il suffit de montrer qu'elle est libre.

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$. Alors en multipliant à gauche par J on a $\lambda_n J e_n = 0$, c'est-à-dire $\lambda_n n e_n = 0$, d'où $\lambda_n = 0$. Ainsi $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i = 0$, et par la liberté de la famille $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ on a $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$.

La matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à J dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$, dont J est semblable, est diagonale dont les termes diagonaux sont $(0, \ldots, 0, n)$.

Exercice 121 * Vandermonde

Le déterminant de Vandermonde associée aux scalaires $(x_0, \dots x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ est donné par :

$$V(x_0, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ & & \dots\dots\dots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

Déjà, si les $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ ne sont pas deux à deux distincts, alors $V(x_0, \dots, x_n) = 0$ puisque c'est le déterminant d'une matrice avec deux lignes égales.

Sinon, notons P le polynôme $V(X, x_1, \dots, x_n)$. En développant par rapport à la première colonne, on voit que P est un polynôme de degré $\leq n$. De plus, les $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ forment n racines distinctes de P, donc P est de la forme

$$P = \lambda(X - x_1) \dots (X - x_n),$$

avec un certain $\lambda \in \mathbb{K}$. λ est le coefficient de P devant X^n. En développant par rapport à la première ligne, on voit qu'il est égal à $(-1)^n V(x_1, \dots, x_n)$. Donc

$$\begin{aligned} P &= (-1)^n V(x_1, \dots, x_n)(X - x_1) \dots (X - x_n) \\ &= V(x_1, \dots, x_n)(x_1 - X) \dots (x_n - X), \end{aligned}$$

puis $V(x_0, \dots, x_n) = V(x_1, \dots, x_n)(x_1 - x_0) \dots (x_n - x_0)$. On a finalement, puisque $V(x_n) = 1$.

$$V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Notons que cette formule est aussi vraie pour $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ non deux à deux distincts.

Exercice 124

Montrons que la fonction définie par $f(x_1, \dots x_n) = \sum_{j=1}^n \det_e(x_1, \dots, x_{j-1}, u(x_j), x_{j+1}, \dots, x_n)$ sur E^n est multilinéaire alternée. Il n'est pas trop dur de voir qu'elle est multilinéaire. Elle est alternée car, par exemple si $x_1 = x_2$, on a grâce au caractère alterné de $\det_e$ que tous les termes de la somme définissant $f(x_1, \dots, x_n)$ sont nuls sauf éventuellement les deux premiers. Ainsi

$$\begin{aligned} f(x_1, x_1, x_3, \dots, x_n) &= \det_e(u(x_1), x_1, x_3, \dots, x_n) + \det_e(x_1, u(x_1), x_3, \dots, x_n) \\ &= 0, \end{aligned}$$

grâce au caractère antisymétrique de $\det_e$.

f étant d'après ce qui précède une forme multilinéaire alternée de E. Elle est proportionnelle à $\det_e$. Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ telle que $f = \lambda \det_e$. De plus comme par définition $\det_e(e) = 1$ on a

$$\begin{aligned} \lambda &= f(e) \\ &= \sum_{j=1}^n \det_e(e_1, \dots, e_{j-1}, u(e_j), e_{j+1}, \dots, e_n). \end{aligned}$$

Notons $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de u dans la base e. Pour montrer que $\lambda = tr(u)$, il suffit de montrer que $\det_e(e_1, \dots, e_{j-1}, u(e_j), e_{j+1}, \dots, e_n) = A_{j,j}$ pour tout $j = 1, \dots, n$. En effet, comme $u(e_j) = \sum_{i=1}^n A_{i,j} e_i$, on a

$$\begin{aligned} \det_e(e_1, \dots, e_{j-1}, u(e_j), e_{j+1}, \dots, e_n) &= \sum_{i=1}^n A_{i,j} \det_e(e_1, \dots, e_{j-1}, e_i, e_{j+1}, \dots, e_n) \\ &= A_{j,j} \det_e(e_1, \dots, e_{j-1}, e_j, e_{j+1}, \dots, e_n) \quad \text{(car } \det_e \text{ est alternée)} \\ &= A_{j,j} \det_e(e) \\ &= A_{j,j}. \end{aligned}$$

12 Espaces euclidiens

Exercice 126

Pour tout $x_1, \dots, x_n$ tels que $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 1$ on a

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

Si $(a_1, \dots, a_n) = (0, \dots, 0)$, alors l'égalité est vérifiée pour par exemple $x_1 = 1, x_2 = 0, \dots x_n = 0$. Maintenant si $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$, alors, l'égalité est vérifiée en posant $x_k = \frac{a_k}{\sqrt{\sum a_k^2}}$ pour tout $k = 1, \dots, n$.

Exercice 127 Contre-exemple au théorème du supplémentaire orthogonal

Montrons que

$$F^{\perp} = \{f \in E : f_{[0,1]} = 0\}.$$

Seul le sens $\subset$ demande du travail. Soit $f \in F^{\perp}$. Pour tout $\eta \in]0,1[$ on note χ_η la fonction qui vaut 1 sur $[-1, -\eta]$, 0 sur $[0,1]$, et qui se raccorde linéairement entre $-\eta$ et 0. Alors $f\chi_\eta$ est dans F, donc :

$$\int_{-1}^1 f^2 \chi_\eta = 0.$$

La fonction $f^2\chi_\eta$ est continue et positive sur $[-1,1]$, d'intégrale nulle, donc (résultat classique) $f^2\chi_\eta = 0$. En particulier, $f(x) = 0$ pour tout $x \in [-1, -\eta]$. Ceci est vrai pour tout $\eta \in]0,1[$, donc $f(x) = 0$ pour $x \in [-1, 0[$, puis $f(0) = 0$ par continuité de f.

Finalement $F + F^{\perp}$ n'est constitué que de fonctions s'annulant en 0, donc ce n'est pas E tout entier.

13 Probabilités

Exercice 140 *Somme de deux variables binomiales indépendantes

Première méthode. Si $k \in \{0, \dots, n + n'\}$, alors $X + X' = k$ si et seulement si "$X = 0$ et $X' = k$", ou bien "$X = 1$ et $X' = k - 1$", ou bien ..., ou bien "$X = k$ et $X' = 0$". Ce raisonnement implique

$$\begin{aligned} P(X + X' = k) &= \sum_{i=0}^k P\big((X = i) \cap (X' = k - i)\big) \\ &= \sum_{i=0}^k P(X = i)P(X' = k - i) \quad \text{(X et X' sont indépendantes)} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{n'}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n'-k+i} \\ &= p^i (1-p)^{n+n'-i} \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{n'}{k-i}, \end{aligned}$$

et

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n'}{k-i} = \binom{n+n'}{k},$$

ce qui montre bien que $X+X' \sim B(n+n',p)$. La dernière égalité est l'égalité de Chu-Vandermonde, dont on se souvient qu'elle peut se montrer en identifiant les coefficients dans l'égalité polynômiale $(1+X)^n(1+X)^{n'} = (1+X)^{n+n'}$, ou bien en partitionnant l'ensemble des parties à k éléments de $\{1,\dots,n,n+1,\dots,n+n'\}$ suivant le cardinal de leur intersection avec $\{1,\dots,n\}$.

Deuxième méthode, X est la loi de la somme de n Bernoulli de paramètre p indépendantes, X' est la loi de la somme de n' Bernoulli de paramètre p indépendantes, donc $X+X'$ est la loi de la somme de $n+n'$ Bernoulli de paramètre p indépendantes. Finalement $X+X'$ suit une binomiale de paramètre $(n+n',p)$.

Il existe une troisième méthode par les fonctions génératrices, très utile mais vue seulement en spé.

Exercice 141 * Valeurs de probabilité maximale pour la loi binomiale

Soit $k \in \{0,\dots,n-1\}$.

$$\begin{aligned}\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} &= \frac{p^{k+1}(1-p)^{n-(k+1)}}{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}\\ &= \frac{p}{1-p}\frac{n-k}{k+1}\\ &= \frac{p}{1-p}(-1+\frac{n+1}{k+1}).\end{aligned}$$

Après calculs, on trouve

$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} \geq 1 \iff k \leq p(n+1)-1$$

Par conséquent le maximum de $k \in \{0,\dots,n\} \mapsto P(X=k)$ est atteint en $\lfloor p(n+1) \rfloor$ et vaut

$$\binom{n}{\lfloor p(n+1)\rfloor} p^{\lfloor p(n+1)\rfloor}(1-p)^{n-\lfloor p(n+1)\rfloor}$$

Exercice 146 * Majoration de la variance

a) TODO...

b) On prend X une variable aléatoire qui vaut b avec probabilité $p = \frac{m-a}{b-a}$ et a avec probabilité $1-p$. La valeur de p est ainsi choisie afin que la condition $\mathbb{E}[X] = m$ soit vérifiée. Alors

$$\begin{aligned}V(X) &= \mathbb{E}\left[(X-m)^2\right]\\ &= (b-m)^2 p + (m-a)^2(1-p)\\ &= (b-m)^2\frac{m-a}{b-a} + (m-a)^2\frac{b-m}{b-a}\\ &= \frac{(b-a)(m-a)(b-m)}{b-a}\\ &= (m-a)(b-m).\end{aligned}$$