Notations

Si $n \in \mathbb{N}$ est un entier naturel et I un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $\mathscr{C}^n(I)$ l'espace vectoriel des fonctions sur I, à valeurs réelles, de classe $\mathscr{C}^n$, c'est à dire n fois dérivables sur I et dont la n-ième dérivée est continue sur I.
On munit $\mathscr{C}^0([-1,1])$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[-1,1]} |f(t)|.$$

Soit $y \in I$. On dira qu'une fonction $u : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage de y s'il existe un intervalle J ouvert non vide tel que $y \in J$ et $u \in \mathscr{C}^n(I \cap J)$.

Soit $(x,p) \mapsto H(x,p)$ une fonction continue sur $[-1,1] \times \mathbb{R}$ à valeurs réelles. Le but de ce problème est d'étudier certaines fonctions u vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\forall x \in [-1,1], \quad u(x) + H(x, u'(x)) = 0. \tag{1}$$

Partie I

On suppose dans cette partie qu'il existe une fonction $u \in \mathscr{C}^1([-1,1])$ vérifiant

$$\begin{cases} u(x) + |u'(x)| = 0 & \text{pour tout } x \in [-1,1], \\ u(-1) = u(1) = -1. \end{cases} \tag{2}$$

1a. Justifier que l'application $x \mapsto |u'(x)|$ est une fonction de $\mathscr{C}^1([-1,1])$ et en déduire que u est de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de tout point $y \in [-1,1]$ tel que $u'(y) \neq 0$. Calculer l'expression de $u''(y)$ en fonction de $u'(y)$ en de tels points.

1b. Montrer que si $y \in [-1,1]$ est tel que $u'(y) = 0$, alors u' est dérivable en y et $u''(y) = 0$.

2. En déduire que u est une fonction de $\mathscr{C}^2([-1,1])$, qu'elle vérifie sur $[-1,1]$ l'équation différentielle

$$u'' = u$$

et conclure qu'une telle fonction u n'existe pas.

3. Montrer que les fonctions u_0 et u_1 définies par $u_0(x) = -e^{-1+|x|}$ et $u_1(x) = -e^{1-|x|}$ sur $[-1,1]$ sont des fonctions de $\mathscr{C}^0([-1,1])$ et vérifient

$$\begin{cases} u(x) + |u'(x)| = 0, & \text{pour tout } x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \\ u(-1) = u(1) = -1. \end{cases}$$

Partie II

Soit $u \in \mathscr{C}^0([-1,1])$.
On définit le **sur-différentiel** de u en $x \in]-1,1[$ comme l'ensemble des $p \in \mathbb{R}$ pour lesquels il existe une fonction φ de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de x, avec $\varphi'(x) = p$ et telle que $u - \varphi$ admet un **maximum local** en x. On note cet ensemble $D^+u(x)$.
On définit le **sous-différentiel** de u en $x \in]-1,1[$ comme l'ensemble des $p \in \mathbb{R}$ pour lesquels il existe une fonction φ de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de x, avec $\varphi'(x) = p$ et telle que $u - \varphi$ admet un **minimum local** en x. On note cet ensemble $D^-u(x)$.

4. Soit $x_0 \in]-1,1[$. Montrer que si u est de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de x_0 alors

$$D^+u(x_0) = D^-u(x_0) = \{u'(x_0)\}.$$

5. Soit $x_0 \in]-1,1[$. On suppose que $D^+u(x_0)$ et $D^-u(x_0)$ sont non vides.

5a. Prouver qu'il existe φ_1, φ_2 de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de x_0 et $\delta > 0$ tels que

$$u(x_0) = \varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$$

et pour tout $|x - x_0| < \delta$,

$$\varphi_1(x) \leqslant u(x) \leqslant \varphi_2(x).$$

5b. En déduire que u est dérivable en x_0. Déterminer $D^+u(x_0)$ et $D^-u(x_0)$.

6a. Soit $x_0 \in]-1,1[$. Soit $0 < r < \min(|1-x_0|, |1+x_0|)$. En considérant la fonction définie par $\varphi_{x_0,r}(x) = \frac{1}{r^2 - |x-x_0|^2}$ sur l'intervalle ouvert $I_{x_0}(r) =]x_0 - r, x_0 + r[$, montrer qu'il existe $y \in I_{x_0}(r)$ tel que $D^+u(y) \neq \emptyset$.

6b. Démontrer que l'ensemble $\{y \in]-1,1[\,,\ D^+u(y) \neq \emptyset\}$ est dense dans $]-1,1[$.

7a. Soit $x_0 \in]-1,1[$ tel que $D^+u(x_0) \neq \emptyset$. Soit $p \in D^+u(x_0)$. Montrer que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{\substack{y \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \cap [-1,1] \\ y \neq x_0}} \frac{u(y) - u(x_0) - p(y - x_0)}{|y - x_0|} \leqslant 0. \tag{3}$$

Dans les sous-questions **7b** à **7e**, on considère $x_0 \in]-1,1[$ et $p \in \mathbb{R}$ satisfaisant (3). Le but est de montrer qu'alors réciproquement $p \in D^+u(x_0)$.

7b. On pose, pour $r > 0$,

$$\varphi(r) = \max \left\{ 0, \sup_{\substack{y \in [x_0-r, x_0+r] \cap [-1,1] \\ y \neq x_0}} \frac{u(y) - u(x_0) - p(y - x_0)}{|y - x_0|} \right\}$$

et $\varphi(0) = 0$. Justifier que, pour tout $r > 0$, $\varphi(r)$ est un nombre réel bien défini, puis que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$u(x) \leqslant u(x_0) + p(x - x_0) + \varphi(|x - x_0|)|x - x_0|.$$

7c. Montrer que la fonction ρ définie sur $[0, +\infty[$ par $\rho(r) = \int_0^r \varphi(s)\, ds$ appartient à $\mathscr{C}^1([0, +\infty[)$ et vérifie

$$\rho(0) = \rho'(0) = 0.$$

7d. Prouver que

$$\forall r \geqslant 0, \quad \rho(2r) \geqslant \varphi(r) r.$$

7e. Conclure que $p \in D^+u(x_0)$ et que, pour tout $x_0 \in]-1,1[$,

$$D^+u(x_0) = \Big\{ p \in \mathbb{R}, \ \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{\substack{y \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \cap [-1,1] \\ y \neq x_0}} \frac{u(y) - u(x_0) - p(y - x_0)}{|y - x_0|} \leqslant 0 \Big\}.$$

On peut montrer de même (mais on ne demande pas de le vérifier) que pour tout $x_0 \in]-1,1[$,

$$D^-u(x_0) = \Big\{ p \in \mathbb{R}, \ \lim_{\varepsilon \to 0^+} \inf_{\substack{y \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \cap [-1,1] \\ y \neq x_0}} \frac{u(y) - u(x_0) - p(y - x_0)}{|y - x_0|} \geqslant 0 \Big\}.$$

8. Soit $x_0 \in]-1,1[$. Montrer que le résultat de la question **4** est toujours valable en supposant uniquement u dérivable en x_0.

9. Soit $x_0 \in]-1,1[$ tel que $D^+u(x_0) \neq \emptyset$. Démontrer que $D^+u(x_0)$ est un intervalle fermé.

10. On suppose dans cette question que u est **concave** sur $[-1,1]$. Soit $x_0 \in]-1,1[$.

10a. Soient $y_1, y_2 \in [-1,1] \setminus \{x_0\}$ avec $y_1 < y_2$. Prouver que

$$\frac{u(y_1) - u(x_0)}{y_1 - x_0} \geqslant \frac{u(y_2) - u(x_0)}{y_2 - x_0}.$$

10b. Montrer que

$$\lim_{y \to x_0^-} \frac{u(y) - u(x_0)}{y - x_0} =: \ell^- \quad \text{et} \quad \lim_{y \to x_0^+} \frac{u(y) - u(x_0)}{y - x_0} =: \ell^+$$

sont bien définies et que $D^+u(x_0) = [\ell^+, \ell^-]$.

1/2 **10c.** Démontrer que

$$D^+u(x_0) = \Big\{ p \in \mathbb{R}, \ \forall x \in [-1,1], \ u(x) \leqslant u(x_0) + p(x - x_0) \Big\}.$$

En déduire que u admet un maximum en x_0 si et seulement si $0 \in D^+u(x_0)$.

Partie III

Soit $(x,p) \mapsto H(x,p)$ une fonction continue sur $[-1,1] \times \mathbb{R}$ à valeurs réelles. On suppose qu'il existe une fonction continue croissante $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, vérifiant $\omega(0) = 0$, telle que, pour tous $x, y \in [-1,1]$, et pour tout $p \in \mathbb{R}$,

$$|H(x,p) - H(y,p)| \leqslant \omega(|x - y|(1 + |p|)). \tag{4}$$

On dit que $u \in \mathscr{C}^0([-1,1])$ est une **sur-solution** de (1) si pour tout $x \in]-1,1[$, pour tout $p \in D^-u(x)$,

$$u(x) + H(x,p) \geqslant 0.$$

On dit que $u \in \mathscr{C}^0([-1,1])$ est une **sous-solution** de (1) si pour tout $x \in]-1,1[$, pour tout $p \in D^+u(x)$,

$$u(x) + H(x,p) \leqslant 0.$$

11a. Montrer que si $u \in \mathscr{C}^1([-1,1])$ vérifie

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad u(x) + H(x,u'(x)) = 0,$$

alors u est sur-solution et sous-solution de (1).

11b. Montrer que si u est à la fois sur-solution et sous-solution de (1), alors en tout point $x \in]-1,1[$ au voisinage duquel u est de classe $\mathscr{C}^1$, on a

$$u(x) + H(x,u'(x)) = 0.$$

On souhaite démontrer que si u est une sous-solution et v une sur-solution de (1) telles que

$$u(y) \leqslant v(y) \qquad \text{pour } y \in \{-1,1\},$$

alors

$$u \leqslant v \qquad \text{sur } [-1,1].$$

Dans les questions **12** à **15**, on suppose par l'absurde qu'il existe $y_0 \in [-1,1]$ pour lequel $u(y_0) > v(y_0)$.

12. Montrer que la fonction $u - v$ atteint son maximum sur $[-1,1]$ en un point $x_0 \in]-1,1[$ et $M := \max_{x\in[-1,1]}(u(x) - v(x)) > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in [-1,1]^2$ vérifiant

$$|x-y| \leqslant \sqrt{2(\|u\|_\infty + \|v\|_\infty)\eta},$$

on a

$$|u(x) - u(y)| + |v(x) - v(y)| < M/2$$

et

$$\omega(|x-y| + 2|v(x) - v(y)|) < M/2,$$

où ω est la fonction intervenant en (4).

Pour un paramètre η obtenu grâce à la question précédente, on considère la fonction Φ_η : $[-1,1]^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$\Phi_\eta(x,y) = u(x) - v(y) - \frac{|x-y|^2}{2\eta}.$$

13. Démontrer que Φ atteint son maximum sur $[-1,1]^2$ en un point $(x_\eta, y_\eta) \in [-1,1]^2$ tel que $\Phi_\eta(x_\eta, y_\eta) \geqslant M$.

14a. Montrer que

$$|x_\eta - y_\eta| \leqslant \sqrt{2(\|u\|_\infty + \|v\|_\infty)\eta}.$$

14b. En déduire que $|x_\eta| \neq 1$ et $|y_\eta| \neq 1$.

14c. Conclure que

$$\frac{x_\eta - y_\eta}{\eta} \in D^+u(x_\eta) \cap D^-v(y_\eta).$$

15. Prouver que

$$u(x_\eta) - v(y_\eta) \leqslant \omega(|x_\eta - y_\eta| + 2|v(x_\eta) - v(y_\eta)|)$$

et obtenir une contradiction. Conclure.

Partie IV

16a. Calculer le sur-différentiel et le sous-différentiel de la fonction u_0 de la question **3** pour tout $x \in]-1,1[\setminus \{0\}$.

16b. Montrer que

$$D^+u_0(0) = [-e^{-1}, e^{-1}] \text{ et } D^-u_0(0) = \emptyset.$$

16c. Vérifier que u_0 est sur-solution et sous-solution de (1) pour $H(x,p) = |p|$.

16d. Qu'en est-il de u_1 ?

16e. En déduire que u_0 est l'unique fonction continue vérifiant $u_0(-1) = u_0(1) = -1$ et qui soit sur-solution et sous-solution de (1) pour $H(x,p) = |p|$.

Soit $\varepsilon \in]0,1[$. On pose

$$\lambda_\varepsilon^\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

et on définit la fonction $u_\varepsilon : [-1,1] \to \mathbb{R}$ par la formule

$$u_\varepsilon(x) = \frac{-\lambda_\varepsilon^- e^{\lambda_\varepsilon^+ |x|} + \lambda_\varepsilon^+ e^{\lambda_\varepsilon^- |x|}}{\lambda_\varepsilon^- e^{\lambda_\varepsilon^+} - \lambda_\varepsilon^+ e^{\lambda_\varepsilon^-}}.$$

17. Montrer que u_ε est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[-1,1]$ et vérifie

$$\begin{cases} u_\varepsilon(x) + |u_\varepsilon'(x)| - \varepsilon u_\varepsilon''(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in [-1,1], \\ u_\varepsilon(-1) = u_\varepsilon(1) = -1. \end{cases} \tag{5}$$

18a. Montrer que u_ε est l'unique solution de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[-1,1]$ à (5).

18b. Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $]0,1[$ tendant vers 0. Prouver que $(u_{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ lorsque $n \to +\infty$ vers une fonction que l'on déterminera.