⋆ ⋆ ⋆

Soit d un entier valant 1 ou 2. On rappelle qu'une fonction polynômiale sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs complexes est un élément de $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{(t,s) \mapsto t^k s^\ell \ : \ k, \ell \in \mathbb{N}\}$.

Une fonction $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est dite *bornée* s'il existe une constante positive M pour laquelle l'inégalité $|g(x)| \leqslant M$ est vraie pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^d$.

Une fonction $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est dite à *décroissance rapide* si pour toute fonction polynômiale $P : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, la fonction gP est bornée sur $\mathbb{R}^d$. L'ensemble des fonctions continues à décroissance rapide est noté $\mathscr{C}^0_{\text{rap}}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$.

Une fonction $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est dite à *croissance lente* s'il existe une fonction polynômiale $P : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^*$ pour laquelle h/P est bornée sur $\mathbb{R}^d$.

Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$ et tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$ on pose

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} f.$$

Par un abus de notation, si $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{N}$, on notera $\partial^n f$ la fonction $f^{(n)}$ dans les deux lignes qui suivent. On introduit les ensembles suivants :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}) = \Big\{ f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}) \ : \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \ \partial^\alpha f \text{ est à décroissance rapide} \Big\},$$

$$\mathcal{O}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}) = \Big\{ h \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}) \ : \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \ \partial^\alpha h \text{ est à croissance lente} \Big\}.$$

Pour $k \in \{1, 2\}$ on considère les endomorphismes suivants de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$:

$$\partial_k : f \longmapsto \partial_k f, \qquad \mathrm{M}_k : f \longmapsto \{(x_1, x_2) \mapsto x_k f(x_1, x_2)\},$$

et les endomorphismes suivants de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$:

$$\mathrm{D} : f \longmapsto f', \qquad \mathrm{M} : f \longmapsto \{t \mapsto t f(t)\}.$$

Pour tout élément g de $\mathscr{C}^0_{\text{rap}}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$, la fonction $(t,s) \mapsto g(t,s)(1+t^2)(1+s^2)$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$. En particulier, par le théorème de convergence dominée, les deux fonctions

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(t,s)\,\mathrm{d}s, \qquad s \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(t,s)\,\mathrm{d}t$$

sont bien définies, continues et intégrables sur $\mathbb{R}$. On admet dans tout le sujet le Théorème de Fubini sur $\mathscr{C}^0_{\text{rap}}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$ qui exprime l'égalité suivante pour les éléments g de cet espace :

$$\int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} g(t,s)\,\mathrm{d}s \right\} \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} g(t,s)\,\mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}s.$$

On notera dorénavant le nombre complexe précédent

$$\int_{\mathbb{R}^2} g,$$

et on pourra utiliser sans la justifier l'inégalité

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} g \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^2} |g|.$$

Le but de ce sujet est de démontrer un résultat fondamental établi en 1974 et par la suite considérablement généralisé dans le cadre de l'étude des équations aux dérivées partielles non linéaires.

Les parties **I** et **II** sont indépendantes. La partie **III** utilise des résultats de la partie **II**. La partie **IV** utilise ceux des parties **II** et **III**. La partie **V** dépend de toutes les précédentes.

I. Convergence faible

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ un espace préhilbertien réel. On dit qu'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H converge *faiblement* vers $v \in H$ si, pour tout $z \in H$, $\langle v_n, z\rangle$ converge vers $\langle v, z\rangle$; ce mode de convergence sera dorénavant noté $v_n \rightharpoonup v$. On dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *fortement* vers v lorsque $\|v - v_n\| \to 0$ quand $n \to +\infty$; ce mode de convergence est classiquement noté $v_n \to v$.

(I.1) Démontrer que la limite faible, lorsqu'elle existe, est unique.

(I.2) Démontrer que la convergence forte implique la convergence faible.

(I.3) Démontrer que si $v_n \rightharpoonup v$ et si $\|v_n\|$ converge vers $\|v\|$, alors $v_n \to v$.

(I.4) Démontrer que si H est de dimension finie, alors la convergence faible équivaut à la convergence forte.

(I.5) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Démontrer que si $v_n \rightharpoonup v$ et $w_n \to w$, alors $\langle v_n, w_n\rangle \to \langle v, w\rangle$.

(I.6) Soit $H = \mathscr{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ muni du produit scalaire suivant pour $f, g \in H$

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(I.6.a) En notant $c_n : t \mapsto \cos(nt)$, montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans H et que $c_n \rightharpoonup 0$.
Indication : On pourra utiliser une intégration par parties.

(I.6.b) Montrer cependant que $(\langle c_n, c_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

Le reste du sujet se consacre à l'élaboration d'un cadre préhilbertien précis que l'on exploitera dans la partie **V** pour assurer le passage à la limite dans un produit $\langle v_n, w_n\rangle$ sans qu'aucune des deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge fortement.

II. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$

Dans cette section nous allons établir quelques propriétés de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ qui nous seront utiles pour la suite.

On admet dans tout le sujet que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ et $\mathcal{O}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ stables par les opérateurs ∂_k et M_k lorsque $d = 2$ et par les opérateurs D et M lorsque $d = 1$.

(II.1) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$. Montrer qu'en fixant l'une ou l'autre de ses variables, la fonction d'une variable obtenue est un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

(II.2) Exhiber un élément $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ qui ne s'annule en aucun point.

(II.3) Montrer que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ et $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, alors la fonction

$$f \otimes g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & f(x_1)g(x_2) \end{array}$$

appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$.

(II.4) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ ne contenant que des fonctions bornées. On suppose que V est stable par les opérateurs ∂_k et M_k pour $k \in \{1,2\}$. Démontrer que $V \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$.

(II.5) Montrer que si $(h, f) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, alors $hf \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$.
Indication : On peut traiter cette question en utilisant la précédente.

~ **(II.6)** À l'aide du théorème de convergence dominée sur $\mathbb{R}$, établir la version bidimensionnelle suivante : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}^2$ et s'il existe un élément $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ telle que $|f_n| \leqslant |g|$ pour tout n, alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

III. Endomorphismes de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ commutant avec les opérateurs ∂_k et M_k

Dans cette section nous allons montrer qu'un endomorphisme de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ commutant avec les opérateurs ∂_k et M_k est nécessairement une homothétie. Nous commençons par le cas d'une seule variable, où les opérateurs précédents sont simplement remplacés par D et M.

(III.1) Soit L un endomorphisme de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ commutant avec M.

(III.1.a) En utilisant une formule de Taylor, montrer que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ s'annule en $a \in \mathbb{R}$, alors f s'écrit $f(s) = (s-a)g(s)$ où $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

(III.1.b) Démontrer que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ s'annule en $a \in \mathbb{R}$, alors $\mathrm{L}(f)$ également.

(III.1.c) Soient $g, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(a)\mathrm{L}(g)(a) = g(a)\mathrm{L}(f)(a)$.

~ **(III.1.d)** En déduire l'existence d'une fonction $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{L}(f) = \psi f$.

(III.1.e) Montrer que si L commute en plus avec D, alors L est une homothétie, *i.e.* qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que pour toute $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, on ait $\mathrm{L}(f) = \alpha f$.

(III.2) Soit T un endomorphisme de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ commutant avec tous les opérateurs ∂_k et M_k, pour $k = 1, 2$.

(III.2.a) Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$\mu_a : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \\ f & \longmapsto & \{t \mapsto f(t,a)\}. \end{array}$$

Démontrer que μ_a est une surjection linéaire.

On admet l'égalité $\operatorname{Ker}\mu_a = \operatorname{Im}\nu_a$, *où* ν_a *désigne l'endomorphisme* $\mathrm{M}_2 - a\mathrm{I}$ *de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ *avec* I *l'endomorphisme identité sur* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$. *La preuve de cette égalité est analogue à celle développée pour la question* **(III.1.a)**.

(III.2.b) Montrer que pour $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, l'application $\mu_a \circ \mathrm{T}$ est constante sur l'ensemble $\mu_a^{-1}(h)$.

La valeur que prend $\mu_a \circ \mathrm{T}$ *sur* $\mu_a^{-1}(h)$ *sera par la suite notée* $\mathrm{L}_a(h)$ *; c'est un élément de* $\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

(III.2.c) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ l'application L_a est un endomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ commutant avec D et M.

(III.2.d) En déduire l'existence d'une fonction $\beta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ telle que pour tout couple (t,a) de $\mathbb{R}^2$, on ait $\mathrm{T}(f)(t,a) = \beta(a)f(t,a)$. Conclure.

IV. La transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$

Pour $\xi \in \mathbb{R}^2$, on note e_ξ la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ définie par la formule $e_\xi(x) = e^{-i(x|\xi)}$, où $(\cdot|\cdot)$ est le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^2$.

(IV.1) Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ on pose

$$\Gamma(f) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(z,t) \longmapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-isz} f(t,s)\mathrm{d}s.$$

(IV.1.a) Démontrer que pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, $\Gamma(f)$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.

(IV.1.b) Démontrer que pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, $\Gamma(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ en exprimant $\partial_1\Gamma(f)$ et $\partial_2\Gamma(f)$.

(IV.1.c) Démontrer que pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\partial^\alpha\Gamma(f)$ est bien définie et qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ telle que $\partial^\alpha\Gamma(f) = \Gamma(g)$. En déduire le caractère $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ de $\Gamma(f)$.

(IV.2) En utilisant **(II.4)**, montrer que $\Gamma(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$.

(IV.3) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2$, $e_\xi f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$.

Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, *on introduit sa* transformée de Fourier :

$$\widehat{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\xi \longmapsto \int_{\mathbb{R}^2} e_\xi f.$$

(IV.4) Que vaut $\Gamma \circ \Gamma(f)$? En déduire que $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$.

De la même manière qu'en **(II.6)** *nous avons établi un théorème de convergence dominée bidimensionnel, il est possible de démontrer un théorème de dérivation sous l'intégrale et une formule d'intégration par parties sur* $\mathbb{R}^2$. *Avec l'aide de tels résultats on peut démontrer les formules suivantes pour* $k = 1, 2$, *que l'on admet jusqu'à la fin de l'énoncé :*

$$\partial_k \widehat{f} = -i\,\widehat{\mathrm{M}_k f},$$
$$\mathrm{M}_k \widehat{f} = -i\,\widehat{\partial_k f}.$$

(IV.5) Montrer l'existence d'une constante $\alpha \in \mathbb{C}$ telle que pour tout élément $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, $\widehat{\widehat{f}} = \alpha \check{f}$, où $\check{f}$ est définie par $\check{f}(x) = f(-x)$.

(IV.6) On considère sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ l'endomorphisme $h \mapsto h^\star$ défini par $h^\star(x_1, x_2) = h(x_2, x_1)$.

(IV.6.a) Pour $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^2} g\Gamma(f) = \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(g^\star)^\star f.$$

(IV.6.b) En déduire

$$\int_{\mathbb{R}^2} g\widehat{f} = \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{g} f.$$

Indication : Démontrer que les endomorphismes $g \mapsto g^\star$ et $g \mapsto \widehat{g}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ commutent.

(IV.7) En déduire que, pour $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}\,\overline{\widehat{g}} = \alpha \int_{\mathbb{R}^2} f\overline{g},$$

où $g \mapsto \overline{g}$ désigne la conjugaison complexe et α le nombre complexe de la question **(IV.5)**, dont on démontrera qu'il est réel et strictement positif.

V. Structure préhilbertienne sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$

Pour deux éléments $h_1, h_2 \in \mathscr{C}^0_{\text{rap}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ on définit

$$\langle h_1, h_2\rangle = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^2} \overline{h_1} h_2.$$

On admet par la suite que l'expression $\|h\|_2 = \sqrt{\langle h, h\rangle}$ définit une norme sur $\mathscr{C}^0_{\text{rap}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ et que l'on dispose de l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante (cas complexe) :

$$\forall h_1, h_2 \in \mathscr{C}^0_{\text{rap}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}), \qquad \left|\int_{\mathbb{R}^2} h_1 h_2\right| \leqslant \|h_1\|_2 \|h_2\|_2.$$

Le sous-espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ à valeurs réelles muni de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un espace préhilbertien ; c'est dans ce cadre que nous allons reprendre la notion de convergence faible introduite dans la partie **I**.

Une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ sera dite *bornée* si la suite $(\|h_n\|_2)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$.

On rappelle que pour tout élément $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, on a défini dans la partie **IV** sa transformée de Fourier, laquelle est notée $\widehat{h}$.

Pour tout entier naturel $N \geqslant 1$ on pourra utiliser sans preuve le résultat suivant : il existe une fonction paire $\theta_N \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ à valeurs dans $[0,1]$, identiquement égale à 1 sur le carré $[-N,N]^2$, identiquement nulle en dehors du carré $[-3N,3N]^2$ et telle que $|\partial_k\theta_N| \leqslant 1$ pour $k = 1,2$.

(V.1) Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites **bornées** de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ convergeant faiblement vers 0 dans cet espace (voir partie **I**).

(V.1.a) Montrer que pour toute fonction $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, les suites $(\widehat{\theta\, g_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\widehat{\theta\, f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement vers 0 sur $\mathbb{R}^2$ et que

$$\sup_{n\in\mathbb{N},\,\xi\in\mathbb{R}^2} |\widehat{\theta g_n}(\xi)| < \infty, \qquad \sup_{n\in\mathbb{N},\,\xi\in\mathbb{R}^2} |\widehat{\theta f_n}(\xi)| < \infty.$$

(V.1.b) On suppose l'existence d'un compact $K \subset \mathbb{R}^2$ en dehors duquel toutes les fonctions g_n sont identiquement nulles. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\langle f_n, g_n\rangle = \langle \varphi_n, \psi_n\rangle$, où $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ telles que $(\widehat{\varphi_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\widehat{\psi_n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement vers 0 sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\sup_{n\in\mathbb{N},\,\xi\in\mathbb{R}^2} |\widehat{\varphi_n}(\xi)| < \infty, \qquad \sup_{n\in\mathbb{N},\,\xi\in\mathbb{R}^2} |\widehat{\psi_n}(\xi)| < \infty,$$

ainsi que

$$\|\partial_1\varphi_n\|_2 \leqslant \|f_n\|_2 + \|\partial_1 f_n\|_2,$$
$$\|\partial_2\psi_n\|_2 \leqslant \|g_n\|_2 + \|\partial_2 g_n\|_2.$$

(V.1.c) En déduire (toujours en supposant l'existence de K) que si $(\partial_1 f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\partial_2 g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, alors $\langle f_n, g_n\rangle \to 0$.
Indication : On pourra montrer que $|1-\theta_N(x_1,x_2)| \leqslant (|x_1|+|x_2|)/N$.

(V.2) Montrer le Théorème de Rellich : soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ identiquement nulle en dehors de K et convergeant faiblement. Si $(\partial_1 h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\partial_2 h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont également bornées dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, alors $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement.

(V.3) Pour cette dernière question étant donnés deux éléments $F = (f_1, f_2)$ et $G = (g_1, g_2)$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})^2$ on pose

$$\langle\langle F, G\rangle\rangle = \langle f_1, g_1\rangle + \langle f_2, g_2\rangle.$$

On admet que $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})^2$ et on y considère $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites bornées convergeant faiblement vers F et G. On suppose l'existence d'un compact $K \subset \mathbb{R}^2$ en dehors duquel les éléments de la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont identiquement nuls. Démontrer que si $(\mathrm{div}(F_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{rot}(G_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, alors

$$\langle\langle F_n, G_n\rangle\rangle \longrightarrow \langle\langle F, G\rangle\rangle,$$

où la divergence et le rotationnel d'une application $H = (h_1, h_2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})^2$ sont définis par

$$\mathrm{div}(H) = \partial_1 h_1 + \partial_2 h_2,$$
$$\mathrm{rot}(H) = \partial_2 h_1 - \partial_1 h_2.$$

Fin de l'épreuve

⋆ ⋆
⋆