J. 19 1030

A2019 – MATH II MP

Concours commun

Mines-Ponts

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH,
CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2019

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :*

*MATHÉMATIQUES II - MP*

*L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.*

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

**Tournez la page S.V.P.**

Majoration du rayon spectral de la matrice de Hilbert

Soit $n$ un entier $\geqslant 1$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. La norme euclidienne associée est notée $\| \ \|$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels, et on identifiera $\mathbb{R}^n$ à l'ensemble $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à coefficients réels. On note ${}^tX = (x_0\ x_1 \cdots x_{n-1}) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ la matrice ligne transposée de la matrice colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Enfin, on note $\widetilde{X}$ la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par la formule

$$\widetilde{X}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k.$$

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de la *matrice de Hilbert* $H_n = (h_{j,k}^{(n)})_{0 \leqslant j,k \leqslant n-1} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ définie par

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}.$$

On a donc $h_{j,k}^{(n)} = \frac{1}{j+k+1}$ pour tous $j, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

## A. Une propriété de Perron-Frobenius

**1)** Montrer que la matrice $H_n$ est symétrique réelle et définie positive. On pourra s'aider du calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (\widetilde{X}(t))^2 dt$.

On note $\mathcal{V}$ le sous-espace propre de $H_n$ associé à la plus grande valeur propre $\rho_n$ de $H_n$.

**2)** Montrer que $X \in \mathcal{V}$ si et seulement si ${}^tX\, H_n\, X = \rho_n \|X\|^2$.

Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de $\mathcal{V}$. On note $|X_0| = \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \\ \vdots \\ |x_{n-1}| \end{pmatrix}$.

**3)** Établir l'inégalité ${}^t X_0\, H_n\, X_0 \leqslant {}^t|X_0|\, H_n\, |X_0|$ et en déduire que $|X_0| \in \mathcal{V}$.

**4)** Montrer que $H_n|X_0|$, puis que $X_0$, n'a aucune coordonnée nulle.

**5)** En déduire la dimension du sous-espace propre $\mathcal{V}$.

## B. Inégalité de Hilbert

Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $P$ un polynôme à coefficients réels.

**6)** En s'aidant du calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$, montrer l'inégalité $\displaystyle\left|\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{\pi} \left|P(e^{i\theta})\right|\mathrm{d}\theta$, puis l'inégalité ${}^t X H_n X \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \left|\widetilde{X}(e^{i\theta})\right|^2 \mathrm{d}\theta$.

**7)** En déduire que ${}^t X H_n X \leqslant \pi \|X\|^2$.

~ 1/2 **8)** Montrer que la suite $(\rho_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et convergente.

## C. Un opérateur intégral

Dans la suite du problème, pour tout entier $n > 0$ et tout réel $x$, on pose

$$K_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k.$$

Soit $E$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, continues et intégrables sur $[0,1[$ et $T_n : E \to E$ l'application définie par

$$T_n(f)(x) = \int_0^1 K_n(tx) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**9)** Montrer que $T_n$ est un endomorphisme de $E$, dont 0 est valeur propre. (On rappelle que $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $T_n$ s'il existe $f \in E$ non nulle telle que $T_n(f) = \lambda f$.)

**10)** Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, calculer $T_n(\widetilde{X})$. En déduire que $T_n$ et $H_n$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.



**Tournez la page S.V.P.**

On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des fonctions $\varphi \in E$ à valeurs strictement positives sur $]0,1[$ telles que $\frac{1}{\varphi}$ admette un prolongement continu sur $[0,1]$. On rappelle que $\rho_n$ est la plus grande valeur propre de $H_n$.

**11)** En utilisant un vecteur propre associé à $\rho_n$, montrer que

$$\rho_n \leqslant \inf_{\varphi \in \mathscr{A}} \sup_{x \in ]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

En utilisant la partie A, montrer que l'on a égalité dans l'inégalité précédente.

## D. Une majoration explicite des rayons spectraux

Soit $\varphi \in \mathscr{A}$ et $n \in \mathbb{N}$. Dans la suite du problème, on pose, pour tout $x \in ]0,1[$ :

$$r_n(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$J_n(x) = \int_0^1 \frac{t^n \varphi(t)}{1-tx}\,\mathrm{d}t,$$

$$\Phi_n(x) = \frac{x^n J_n(x)}{\varphi(x)}.$$

La fonction Gamma d'Euler est définie sur $\mathbb{R}^+$ par la formule

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

On admet, et on pourra utiliser sans démonstration, les formules suivantes :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \text{pour tout } x > 0.$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad \text{pour tout entier } n > 0.$$

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{pour tous réels } \alpha > 0, \beta > 0.$$

**12)** Montrer que $J_n$ est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a l'égalité

$$xJ_n'(x) = \int_0^1 \frac{t^n \varphi(t)}{(1-tx)^2}\,\mathrm{d}t - J_n(x).$$

On suppose dorénavant que $\varphi \in \mathscr{A}$ est de classe $C^1$ sur $[0,1[$ et que $(1-t)\varphi(t) \to 0$ lorsque $t \to 1^-$.

**13)** Montrer que

$$nJ_n(x) = c + nJ_{n-1}(x) + (x-1)\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\,\mathrm{d}t$$

où $c$ est un coefficient à déterminer et où $\varphi'$ désigne la dérivée de $\varphi$. (On pourra traiter à part le cas $n=0$, où l'on considère que $nJ_{n-1}(x)=0$ et où l'on montrera que $c=0$.)

**14)** Déduire des deux questions précédentes que

$$x(1-x)J_n'(x) = c+(n+1)(x-1)J_n(x)+n\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\,\mathrm{d}t.$$

**15)** Soit $\gamma\in\mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $(1-t)y' = -\gamma y$ sur l'intervalle $[0,1[$. À quelles conditions une solution $y(t)$ de cette équation différentielle vérifie-t-elle les hypothèses faites sur $\varphi$ ?

On suppose désormais ces conditions réalisées et que la fonction $\varphi$ est la solution de cette équation différentielle telle que $\varphi(0)=1$.

**16)** Montrer que la fonction $\Phi_n$ est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a :

$$\Phi_n'(x) = -(\gamma+1)\frac{\Phi_n(x)}{x} + c_n\frac{x^{n-1}}{(1-x)^{1+\gamma}}$$

où l'on donnera l'expression de la constante $c_n$ en fonction de $n$ et de $\gamma$.

**17)** En déduire que pour tout $x\in\,]0,1[$,

$$\Phi_n(x) = \frac{c_n'}{x^{1+\gamma}}\int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}}\,\mathrm{d}t.$$

**18)** En déduire que pour $n\geqslant 1$,

$$\rho_n \leqslant \inf_{\alpha\in]0,1[}\ \sup_{x\in]0,1[}\ \frac{1}{x^{1-\alpha}}\int_0^x \frac{1-\theta_n t^n}{t^\alpha(1-t)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}t$$

où l'on a posé $\theta_n = \dfrac{n!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)}$.

Un calcul montre, et on l'admet, que l'inégalité précédente implique l'inégalité :

$$\rho_n \leqslant \inf_{\alpha\in]0,1[} \theta_n^{(1-\alpha)/n}\int_0^{\theta_n^{-1/n}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(1-t)^{1-\alpha}}.$$

**19)** En déduire que $\rho_n \leqslant 2\omega_n \arcsin\left(\dfrac{1}{\omega_n}\right)$, où l'on a posé $\omega_n = 2\left(\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\right)^{1/2n}$.

**20)** Donner un équivalent de $\omega_n - 1$, puis un équivalent de $\pi - 2\omega_n \arcsin\frac{1}{\omega_n}$ lorsque $n\to+\infty$.

FIN DU PROBLÈME